

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών

Εργαστήριο Μηχανικής και Αντοχής Υλικών



Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία του

Χριστόπουλου Κωνσταντίνου

Θέμα :

Αριθμητική μελέτη της μακροσκοπικής απόκρισης σύνθετων υλικών με ελαστοπλαστικές φάσεις και περιοδική μικροδομή

Τριμελής εξεταστική επιτροπή:

- Επιβλέπων : Αγόρας Μιχαήλ , Επίκουρος Καθηγητής
- Μέλος : Αράβας Νικόλαος , Καθηγητής
- Μέλος : Καραμάνος Σπυρίδων , Καθηγητής

Βόλος 2019

Copyright © Χριστόπουλος Κωνσταντίνος, έτος 2019 Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved. Η έγκριση της μεταπτυχιακής διπλωματικής εργασίας από το Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας δεν υποδηλώνει απαραίτητως και αποδοχή των απόψεων του συγγραφέα εκ μέρους του Τμήματος.

Ευχαριστίες

Το μεγαλύτερο ευχαριστώ θα ήθελα να το δώσω στον επιβλέποντα καθηγητή μου ,στον κύριο Αγόρα Μιχάλη για την μεγάλη υπομονή που έκανε και την αμέριστη συμπαράσταση και βοήθεια που μου έδωσε για να μπορέσω να ολοκληρώσω την παρούσα εργασία.Επίσης θέλω να ευχαριστήσω τα υπόλοιπα δύο μέλη της τριμελούς εξεταστικής επιτροπής για την τιμή μου έκαναν να αφιερώσουν από τον πολύτιμο χρόνο τους για να εξετάσουν την εργασία καθώς και τους γονείς και τους φίλους μου που ήταν πάντα στο πλευρό μου και με στήριζαν στις πολλές δυσκολίες που ανέκυψαν κατά τη διάρκεια των μεταπτυχιακών σπουδών μου.

Περιεχόμενα

1 Εισαγωγή.....	1
2 Διατύπωση Προβλήματος.....	3
2.1 Θεώρηση Αντιπροσωπευτικού Στοιχείου Όγκου (RVE).....	3
2.2 Γεωμετρία.....	3
2.3 Ιδιότητες Υλικών.....	6
2.4 Φόρτιση – Συνοριακές Συνθήκες.....	6
3 Αριθμητική Επίλυση του Προβλήματος.....	8
3.1 Κάνναβος Κυψελίδας.....	8
3.2 Παράμετροι.....	8
3.3 Μετεπεξεργασία.....	8
3.4 Σύγκλιση.....	8
4 Αποτελέσματα.....	9
4.1 Επίδραση της αντίθεσης της ετερογένειας των φάσεων R.....	9
4.2 Επίδραση της συγκέντρωσης των σωματιδίων c.....	29
4.3 Επίδραση της μορφής των σωματιδίων w.....	39
5 Βιβλιογραφία.....	54

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Στην παρούσα διπλωματική εργασία γίνεται μια μελέτη της μακροσκοπικής απόκρισης σύνθετων υλικών με ελαστοπλαστικές φάσεις και περιοδική μικροδομή με τη χρήση πεπερασμένων στοιχείων. Η πρόβλεψη της φαινόμενης ή ισοδύναμης καταστατικής συμπεριφοράς των σύνθετων – ετερογενών υλικών (αυτά τα υλικά τα οποία παρουσιάζουν πάνω από μία φάση) είναι ένα αρκετά πολύπλοκο πρόβλημα με μεγάλη αξία, λόγω του τεράστιου εύρους των εφαρμογών που σχετίζονται με τέτοια υλικά. Η μεγάλη δυσκολία του προβλήματος βρίσκεται σε ζητήματα που αφορούν στην επίδραση της μικροδομής στην απόκριση του υλικού και στην περιγραφή της κατάστασής της. Ο Pedro Ponte Castaneda πρότεινε μια θεωρία η οποία αντιμετωπίζει με επιτυχία τις ανωτέρω δυσκολίες. Το θεμέλιο της προταθείσας θεωρίας του Castaneda [P. Ponte Castaneda 1991] είναι μια τεχνική ομογενοποίησης, η οποία προσδιορίζει όρια ή εκτιμήσεις των τοπικών ιδιοτήτων του σύνθετου υλικού (ομογενοποιημένες) καθώς και τον μέσο ρυθμό της παραμόρφωσης και το μέσο σ/ϵ των επιμέρους φάσεων. Σημείο αναφοράς της διαδικασίας ομογενοποίησης είναι ότι η τυπική (χαρακτηριστική του μεγέθους) διάσταση των μεμονωμένων φάσεων είναι πολύ μικρότερη από την τυπική διάσταση του σώματος ή της διακύμανσης των επιβαλλόμενων συνοριακών συνθηκών.

Μια εφαρμογή της εν λόγω θεωρίας σε ελαστοπλαστικά σύνθετα υλικά είναι και η IVP (Incremental variational procedure) [Lahellec and Suquet 2013] και ειδικότερα η εναλλακτική διατύπωση της IVP [Agoras, Avazmohammadi, P. Ponte Castaneda 2016] η οποία υπολογίζει αναλυτικά τη μακροσκοπική απόκριση τέτοιων υλικών και πιο συγκεκριμένα για σύνθετα αποτελούμενα από φορείς πολυμερών ή μεταλλικών υλικών και σφαιροειδή ελαστικά σωματίδια. Η κεντρική ιδέα είναι να χρησιμοποιηθεί μια χρονικά βαθμιδωτή μεταβλητή διατύπωση για το δυναμικό του ρυθμό μεταβολής της παραμόρφωσης ενός ελαστικού-βισκοπλαστικού σύνθετου υλικού, ώστε να οριστεί το πρόβλημα της ομογενοποίησης για ένα ελαστικό-βισκοπλαστικό υλικό με μη ομοιόμορφες ιξωδο-θερμικές παραμορφώσεις στις φάσεις του. Τόσο η μη γραμμικότητα όσο και η ανομοιογένεια των ιδιοτήτων των φάσεων μπορούν να αντιμετωπιστούν μέσω της διαδικασίας μεταβολών του Ponte Castaneda (1991), συγκρίνοντας τα με ένα καταλλήλως βελτιστοποιημένο γραμμικά σύνθετο υλικό με ομογενείς ιδιότητες, για το οποίο οι εκτιμήσεις της ομογενοποίησης είναι διαθέσιμες. Η IVP εφαρμόζεται σε διφασικά σύνθετα υλικά που αποτελούνται από ευθυγραμμισμένα, ελλειψοειδή ελαστικά σωματίδια ευρισκόμενα εντός ενός ελαστικού τέλει πλαστικού φορέα και εξετάζονται οι επιδράσεις της συγκέντρωσης και του σχήματος των σωματιδίων, καθώς και των ιδιοτήτων του φορέα και των σωματιδίων. Μετά τη φόρτιση με ομοιογενή ρυθμό, παρατηρούνται τρεις περιοχές παραμόρφωσης, μια γραμμικά ελαστική, ακολουθούμενη από μια ενδιάμεση ελαστοπλαστική και τέλος μια σταθερή τέλεια πλαστική.

Εκτός από τη θεωρητική επίλυση του προβλήματος της μακροσκοπικής συμπεριφοράς των σύνθετων υλικών και την δημιουργία καταστατικών μοντέλων που την προβλέπουν, έχουν γίνει και προσπάθειες αντιμετώπισης του θέματος μέσω υπολογιστικών μεθόδων. Οι περισσότερες αντιμετωπίζουν πρακτικά ζητήματα της μεταλλουργίας και τα αποτελέσματά

τους έχουν άμεση εφαρμογή στη βιομηχανία.Στις περιπτώσεις αυτές ως σύνθετα υλικά θεωρούνται τα πορώδη μέταλλα και εξετάζεται η μακροσκοπική απόκρισή τους όταν οι πόροι δέχονται αλλαγές στο σχήμα και στο μεγεθός τους.Σημαντικές εργασίες στον τομέα αυτό έχουν γίνει από τους [Srivastava and Needleman 2013] και [Tvergaard,2014] στις οποίες ερευνάται το πόσο επηρεάζεται η μακροσκοπική συμπεριφορά του υλικό σε περιπτώσεις που διαφοροποιούνται κάποιες μεταβλητές του προβλήματος ,όπως το σχήμα του πόρου ,το μεγεθός του και η κατανομή του εντός του φορέα για διάφορες φορτίσεις.

Αντικείμενο της παρούσας εργασίας είναι ο προσδιορισμός της μακροσκοπικής συμπεριφοράς σύνθετου υλικού το οποίο αποτελείται όχι από πόρο αλλά από σωματίδιο που παρουσιάζει αμιγώς γραμμικά ελαστική συμπεριφορά εντός φορέα που παρουσιάζει γραμμικά ελαστική- τέλεια πλαστική συμπεριφορά.Το σύνθετο υλικό διαθέτει περιοδική μικροδομή και μοντελοποιείται ως μοναδιαία κυλινδρική κυψελίδα με το σωματίδιο να τοποθετείται στο κέντρο της και το εξετάζουμε κάτω από συνθήκες απειροστών παραμορφώσεων υπό φόρτιση αξονοσυμμετρικής διάτμησης ,με τη βοήθεια του λογισμικού πεπερασμένων στοιχείων ABAQUS.Για τη συγκεκριμένη φόρτιση εξετάζουμε πως επηρεάζεται η στατιστική πεδίων στο υλικό αλλάζοντας τρεις διαφορετικές μεταβλητές: την ελαστική αντίθεση της ετερογένειας των φάσεων (R),τη συγκέντρωση του σωματιδίου στην κυψελίδα (c) και τη μορφή του σωματιδίου (w).

Η δομή της εργασίας έχει ως εξής : Στο επόμενο κεφάλαιο (2^ο) γίνεται μια πιο αναλυτική διατύπωση του προβλήματος.Αναφέρονται τα κινηματικά μεγέθη και οι καταστατικές εξισώσεις που διέπουν τη συμπεριφορά του υλικού .Επίσης ορίζονται τα γεωμετρικά μεγέθη που προσδιορίζουν τη μικροδομή , το είδος φόρτισης και οι συνοριακές συνθήκες του προβλήματος.

Στο τρίτο κεφάλαιο περιγράφεται λεπτομερώς η διαδικασία επίλυσης του προβλήματος των πεπερασμένων στοιχείων και οι επιμέρους παράμετροι που χρησιμοποιήθηκαν.

Στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της αριθμητικής μελέτης.Πιο συγκεκριμένα περιλαμβάνονται τα μακροσκοπικά διαγράμματα του αποκλίνοντα τανυστή των τάσεων –παραμορφώσεων , της ισοδύναμης τάσης με το χρόνο καθώς και των ροπών 1^{ης} και 2^{ας} τάξεως με το χρόνο ,τόσο για κάθε φάση ξεχωριστά ,όσο και για το σύνθετο υλικό

Κεφάλαιο 2

Διατύπωση Προβλήματος

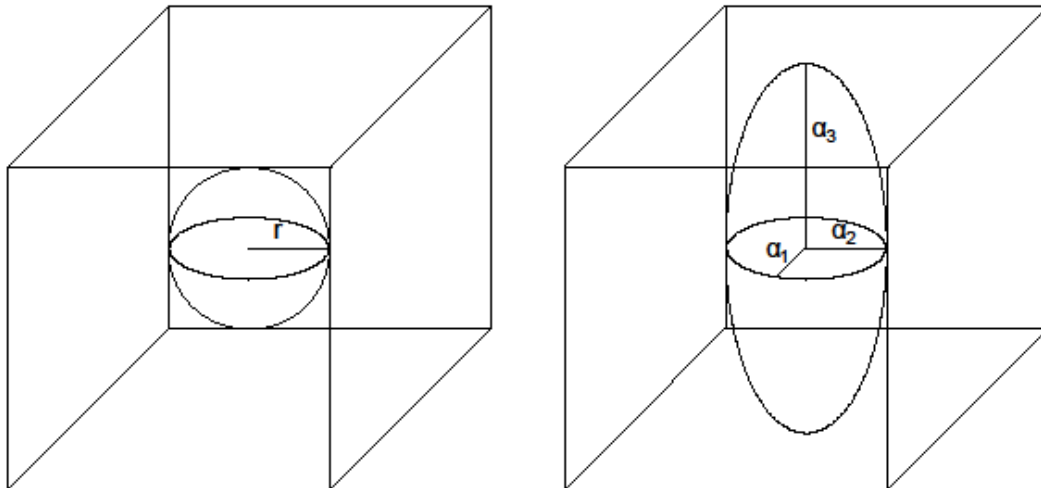
2.1 Θεώρηση Αντιπροσωπευτικού Στοιχείου Όγκου (RVE)

Σκοπός μας είναι να δημιουργήσουμε ένα σύνθετο υλικό με περιοδική μικροδομή και να ορίσουμε την μακροσκοπική του συμπεριφορά. Πρακτικά για να συμβεί κάτι τέτοιο θα έπρεπε να γνωρίζουμε τη συμπεριφορά κάθε σημείου του υλικού ξεχωριστά που είναι αδύνατο. Για να μπορέσουμε λοιπόν να απλοποιήσουμε το πρόβλημα ορίζουμε ως Αντιπροσωπευτικό Κλάσμα Όγκου (RVE) του σύνθετου υλικού την μικρότερη ποσότητα όγκου για την οποία το υλικό συμπεριφέρεται ως ένα ενιαίο ομογενές υλικό με μία μέση καταστατική απόκριση. [Drugan and Willis 1996]. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα θεωρούμε ως RVE ή αλλιώς μοναδιαία κυψελίδα με σφαιρικά ή σφαιροειδή σωματίδια.

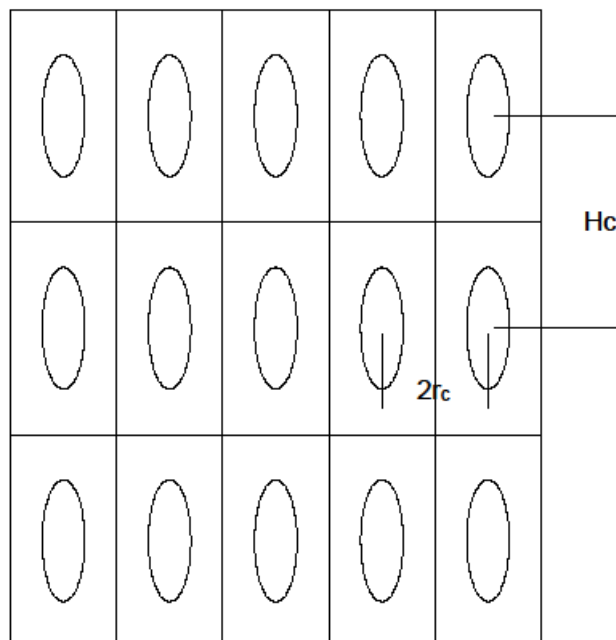
2.2 Γεωμετρία

Το σύνθετο υλικό αποτελείται από δύο διαφορετικές φάσεις, η πρώτη φάση θα σημειώνεται με τον εκθέτη ⁽¹⁾ και ονομάζεται φορέας, ενώ η δεύτερη φάση θα σημειώνεται με τον εκθέτη ⁽²⁾ και θα αποτελείται από το σωματίδιο. Η μικροδομή του υλικού παρουσιάζει περιοδικότητα, για αυτό το λόγο μπορούμε να εξετάσουμε μόνο ένα αντιπροσωπευτικό μοναδιαίο όγκο και να αποφανθούμε για την απόκριση του υλικού, απλοποιώντας σημαντικά το πρόβλημα. Όπως αναφέραμε πιο πάνω η μοναδιαία κυψελίδα αποτελείται από μοναδιαίο κύλινδρο εντός του οποίου περικλείονται σφαιρικά ή σφαιροειδή σωματίδια. Επίσης, στην περίπτωση που ελέγχθηκε η επίδραση της μορφής των σωματιδίων δημιουργήθηκε μοναδιαία κυψελίδα παραλληλεπίδη διατηρώντας τις δύο πλευρές μοναδιαίες και αλλάζοντας την τρίτη με τέτοιο τρόπο ώστε να αντιστοιχεί στα

γεωμετρικά χαρακτηριστικά που είχαν τεθεί αρχικά.



Σχήμα 2.1 :Μοναδιαία κυψελίδα με έγκλειστο σφαιρικό και ελλειψοειδές σωματίδιο αντίστοιχα



Σχήμα 2.2 : Μικροδομή σύνθετου υλικού όπου φαίνεται η περιοδικότητά του

Ορισμός Κλάσματος Όγκου (c)

Γνωρίζουμε ότι

$$\Omega = L^3 = 1 \text{ (ο συνολικός όγκος του μοναδιαίου κυλίνδρου)}$$

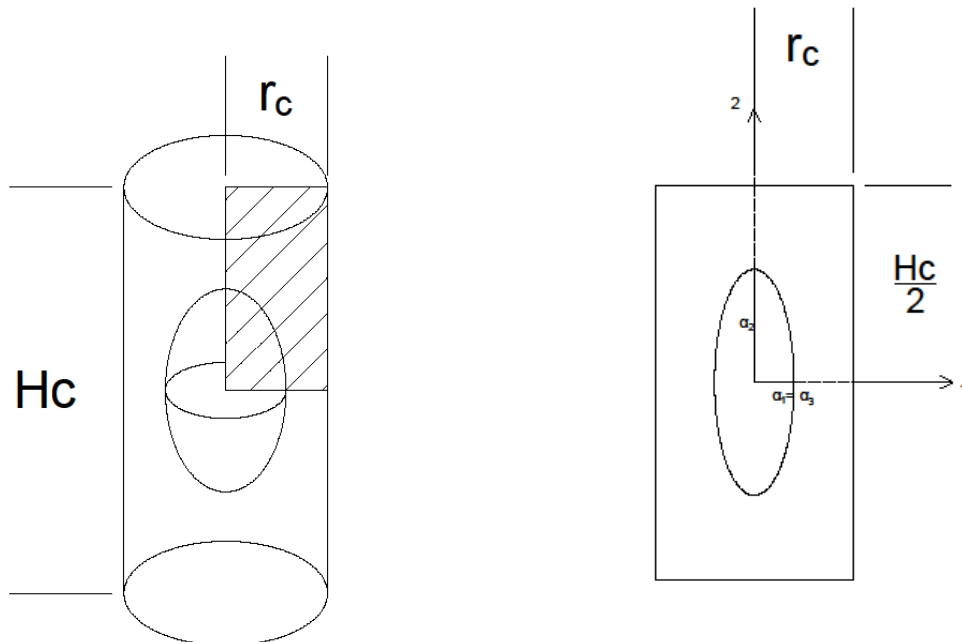
$$\Omega_p = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 \text{ (ο όγκος του σφαιρικού σωματιδίου)}$$

$$\Omega_m = \Omega - \Omega_p \text{ (ο όγκος του φορέα)}$$

ορίζεται ως κλάσμα όγκου των σωματιδίων

$$c = \frac{\Omega_p}{\Omega}$$

Ορισμός Λόγου Πλευρών Σωματιδίου (w)



Σχήμα 2.3 :Σχηματική απεικόνιση της γενικής εικόνας της μικροδομής που εξετάζουμε (αριστερά) και πως απλοποιείται λόγω αξονικής συμμετρίας (δεξιά)

Στην περίπτωση που έχω σφαιροειδή σωματίδια ισχύει

$$w_i = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$$

$$w_d = \frac{H_c}{2r_c}$$

Θεωρώ επίσης $w_i = w_d$ και $r_c = 1$

2.3 Ιδιότητες Υλικών

Έχουμε υποθέσει ότι οι φάσεις του σύνθετου υλικού είναι ισότροπες και ασυμπίεστες

Το σωματίδιο έχει γραμμικά ελαστική συμπεριφορά ενώ ο φορέας θεωρούμε ότι διαθέτει καμπύλη διαρροής γραμμικά ελαστικού – τέλεια πλαστικού υλικού.

2.4 Φόρτιση – Συνοριακές Συνθήκες

Η φόρτιση που επιβάλλουμε στη μοναδιαία κυψελίδα του προβλήματος μας είναι η αξονοσυμμετρική διάτμηση (Axisymmetric Shear). Πιο συγκεκριμένα επιβάλλεται μια αξονική εφελκυστική τάση στη μία διεύθυνση (συγκεκριμένα στην διεύθυνση 2) και δύο ίσες θλιπτικές τάσεις στις άλλες δύο διευθύνσεις έτσι ώστε ο όγκος του υλικού να παραμένει σταθερός. Στην περίπτωση των απειροστών παραμορφώσεων που εξετάζουμε ο τανυστής των παραμορφώσεων διαμορφώνεται ως εξής:

$$[\epsilon] = \begin{bmatrix} -\frac{\epsilon}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\epsilon}{2} \end{bmatrix}$$

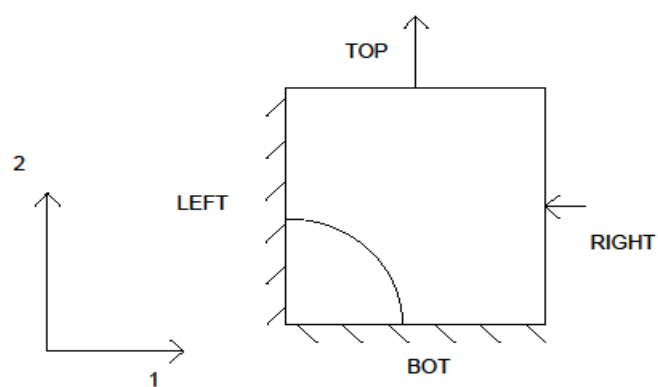
επειδή η φόρτιση εφαρμόζεται κυκλικά διακρίνονται οι εξής τρεις χρονικές διάρκειες

α. Η παραμόρφωση αυξάνεται από $\epsilon=0$ ως $\epsilon=\epsilon^*>0$ για χρόνο $0 \leq t \leq T$

β. Η παραμόρφωση μειώνεται από $\epsilon=\epsilon^*$ ως $\epsilon=-\epsilon^*$ για χρόνο $T \leq t \leq 3T$

γ. Η παραμόρφωση αυξάνεται από $\epsilon=-\epsilon^*$ ως $\epsilon=0$ για χρόνο $3T \leq t \leq 4T$

Μετά το πέρας της χρονικής στιγμής $4T$ έχει ολοκληρωθεί ένας πλήρης κύκλος φόρτισης.



Σχήμα 2.4 : Οι συνοριακές συνθήκες του προβλήματος υπό εξέταση

Κεφάλαιο 3

Αριθμητική Επίλυση του Προβλήματος

3.1 Κάνναβος Κυψελίδας

Η κατασκευή του κάνναβου της κυψελίδας έγινε στο περιβάλλον CAE του ABAQUS. Για το φορέα χρησιμοποιήθηκαν τετρακομβικά τετραεδρικά αξονοσυμμετρικά υβριδικά στοιχεία (CAX4H), ενώ για το σωματίδιο τρικομβικά τριγωνικά αξονοσυμμετρικά υβριδικά στοιχεία (CAX3H). Επίσης κατά την κατασκευή του κάνναβου έγινε προσπάθεια το πλέγμα να είναι πυκνότερο στη διεπιφάνεια των δύο φάσεων.

3.2 Παράμετροι

Λόγω της ασυμπίεστότητας του υλικού θεωρήσαμε συντελεστή poisson $\nu = 0.49$ και αυτό διότι το λογισμικό δεν επιτρέπει τη χρήση του $\nu = 0.5$

Επίσης θεωρήσαμε $\sigma_0 = 1$ και $\mu_{(1)} = 50\sigma_0$ και $\mu_{(2)} = 2\mu_{(1)}$

3.3 Μετεπεξεργασία

Η μακροσκοπική αξονική απόκριση του σύνθετου υλικού, η μέση αξονική απόκριση του φορέα του, η μέση αξονική απόκριση των σωματιδίων του και οι τυπικές αποκλίσεις των πεδίων των τάσεων (φορέα και σωματιδίων) που παρουσιάζονται στο επόμενο κεφάλαιο των αποτελεσμάτων προέκυψαν από κατάλληλη στατιστική επεξεργασία των αριθμητικών αποτελεσμάτων του ABAQUS μέσω προγράμματος γραμμένο στη γλώσσα Python.

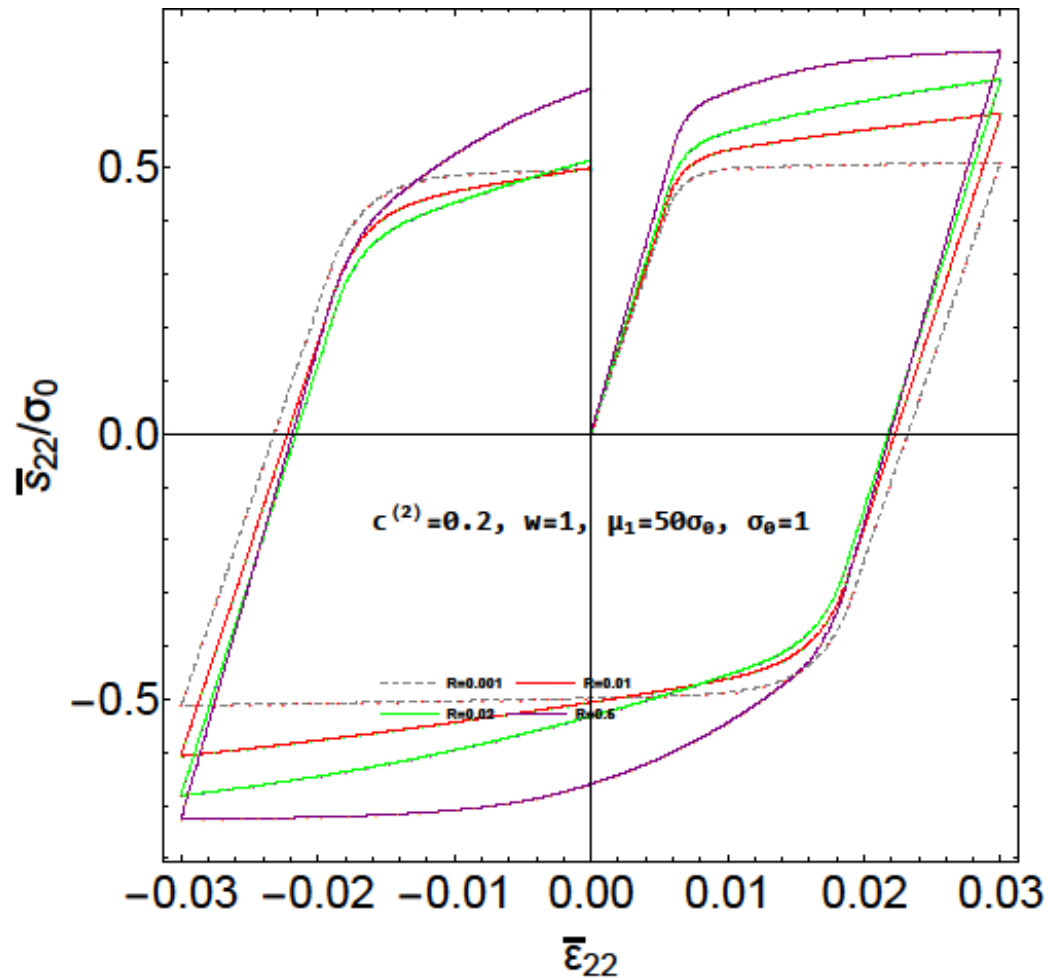
3.4 Σύγκλιση

Τέλος κάθε φορά που άλλαζε μία παράμετρος της ανάλυσης για να ελέγξουμε ότι ο κάνναβος είναι ικανοποιητικά διακριτοποιημένος, επιλύσαν το πρόβλημα για διάφορες πυκνότητες μέχρι να συγκλίνουν οι λύσεις γύρω από κάποια τιμή πέραν της οποίας αυξάνοντας την πυκνότητα του πλέγματος δεν μεταβάλλονταν σημαντικά η λύση. Στα παρακάτω αποτελέσματα χρησιμοποιείται πλέγμα το οποίο προέκυψε κατόπιν σύγκλισης.

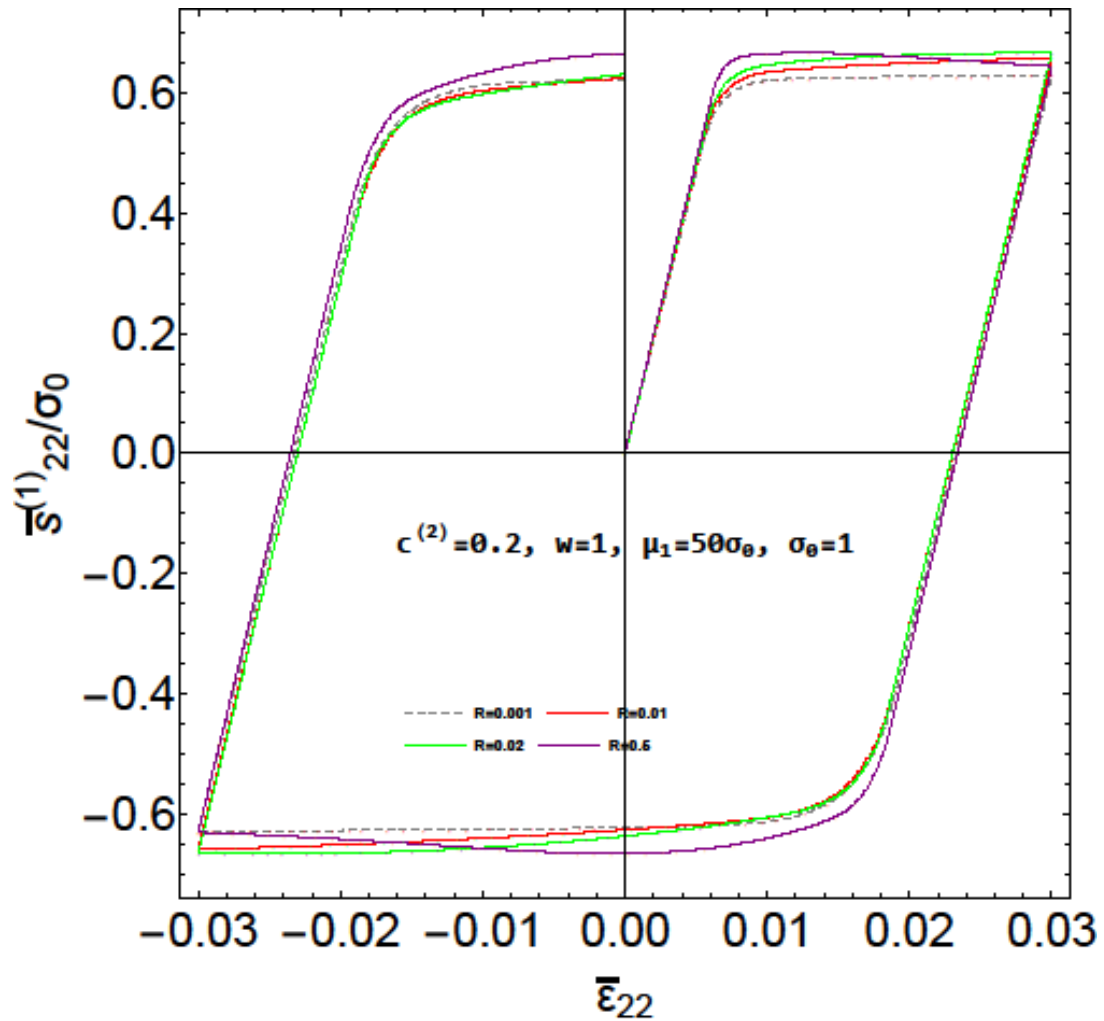
Κεφάλαιο 4

4.1 Επίδραση της αντίθεσης της ετερογένειας των φάσεων

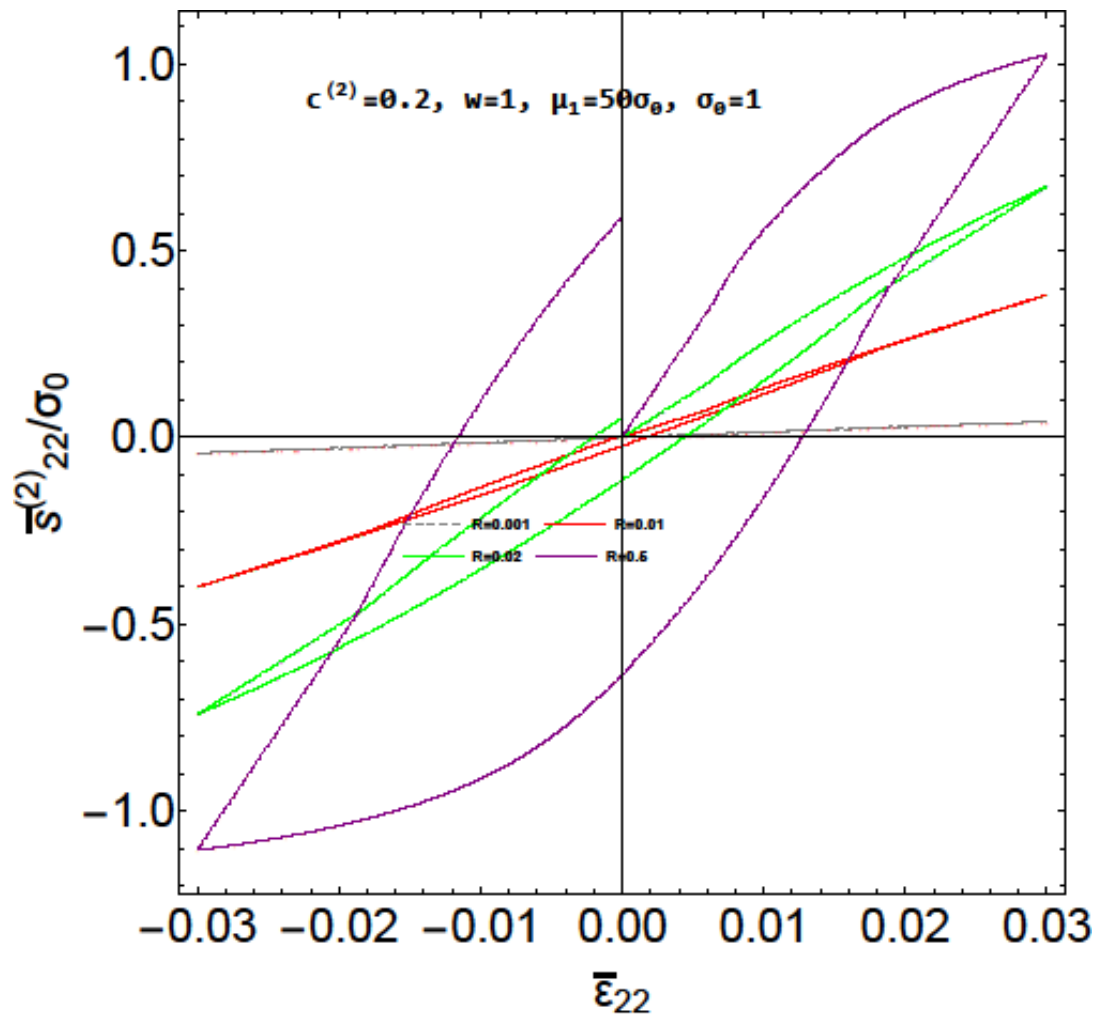
$$R = \mu^{(2)} / \mu^{(1)}$$



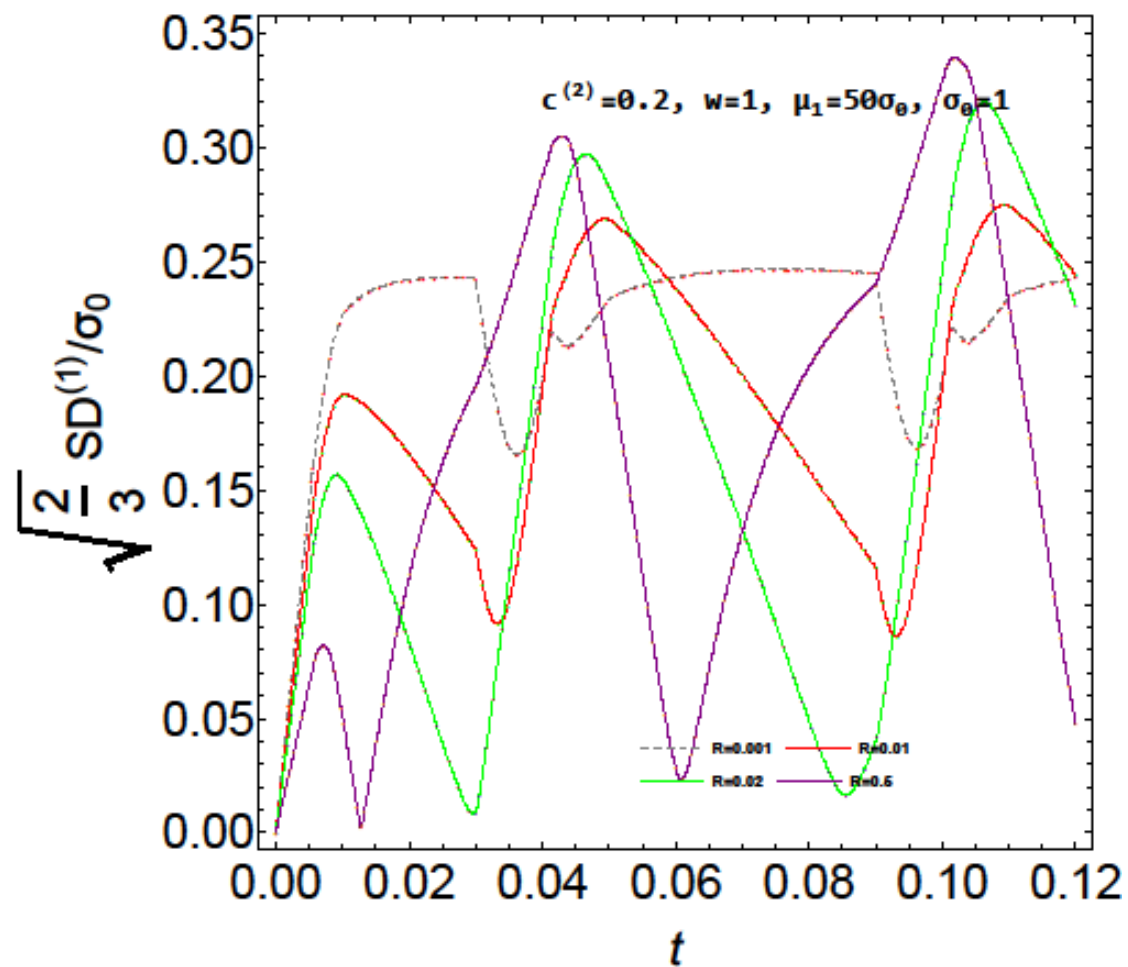
Σχήμα 4.1 : Μακροσκοπική αξονική απόκριση ενός σύνθετου υλικού αποτελούμενα από ελαστικά τέλεια πλαστικό φορέα και ελαστικά σφαιρικά σωματίδια με $c^{(2)}=20\%$, $\mu_1=50\sigma_0$, $\sigma_0=1$ που φορτίζεται με αξονοσυμμετρική παραμόρφωση στη διεύθυνση 2 για συντελεστή $R = \mu^{(2)} / \mu^{(1)} = 0.01, 0.1, 0.2, 0.5$ αντίστοιχα



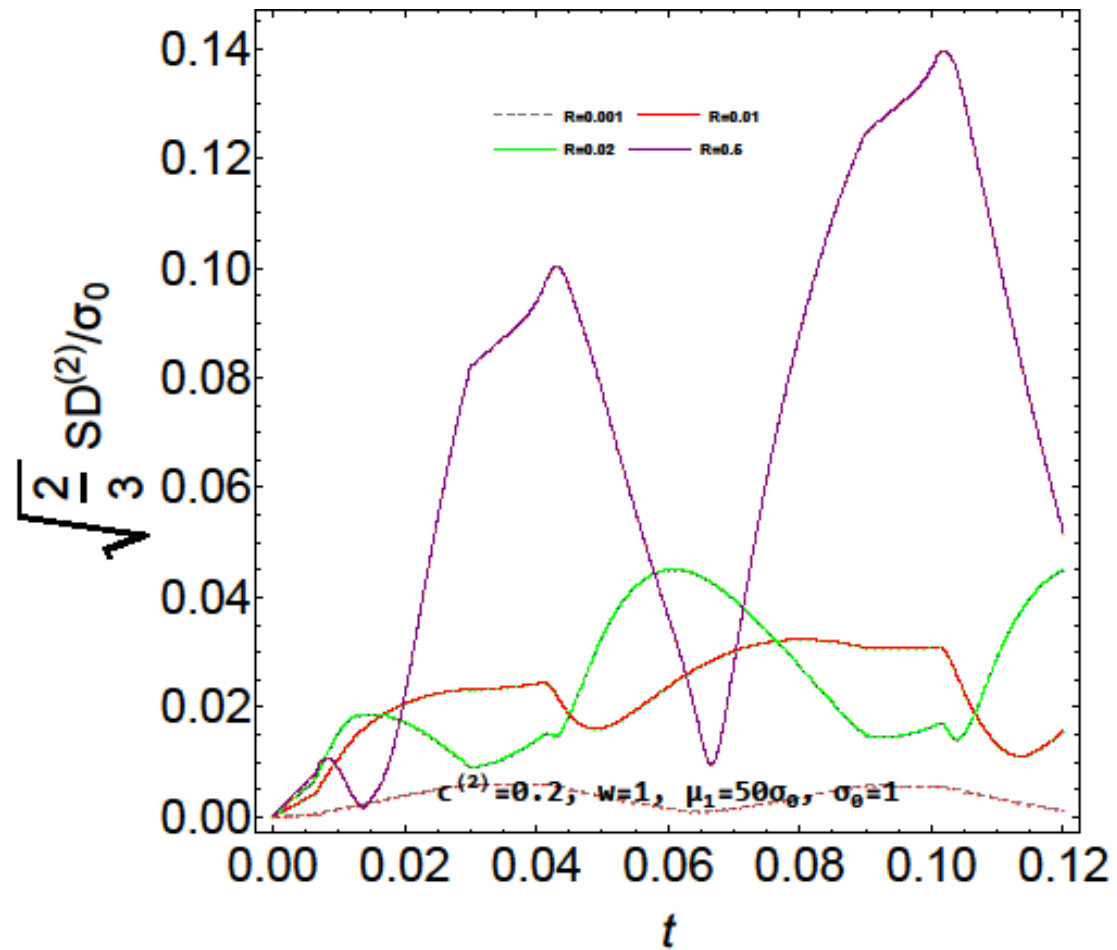
Σχήμα 4.2 : Μέση αξονική απόκριση του **φορέα** ενός σύνθετου υλικού αποτελούμενα από ελαστικά τέλεια πλαστικό φορέα και ελαστικά σφαιρικά σωματίδια με $c^{(2)}=20\%$, $\mu_1=50\sigma_0$, $\sigma_0=1$ που φορτίζεται με αξονοσυμμετρική παραμόρφωση στη διεύθυνση 2 για συντελεστή $R=\mu^{(2)}/\mu^{(1)}=0.01, 0.1, 0.2, 0.5$ αντίστοιχα



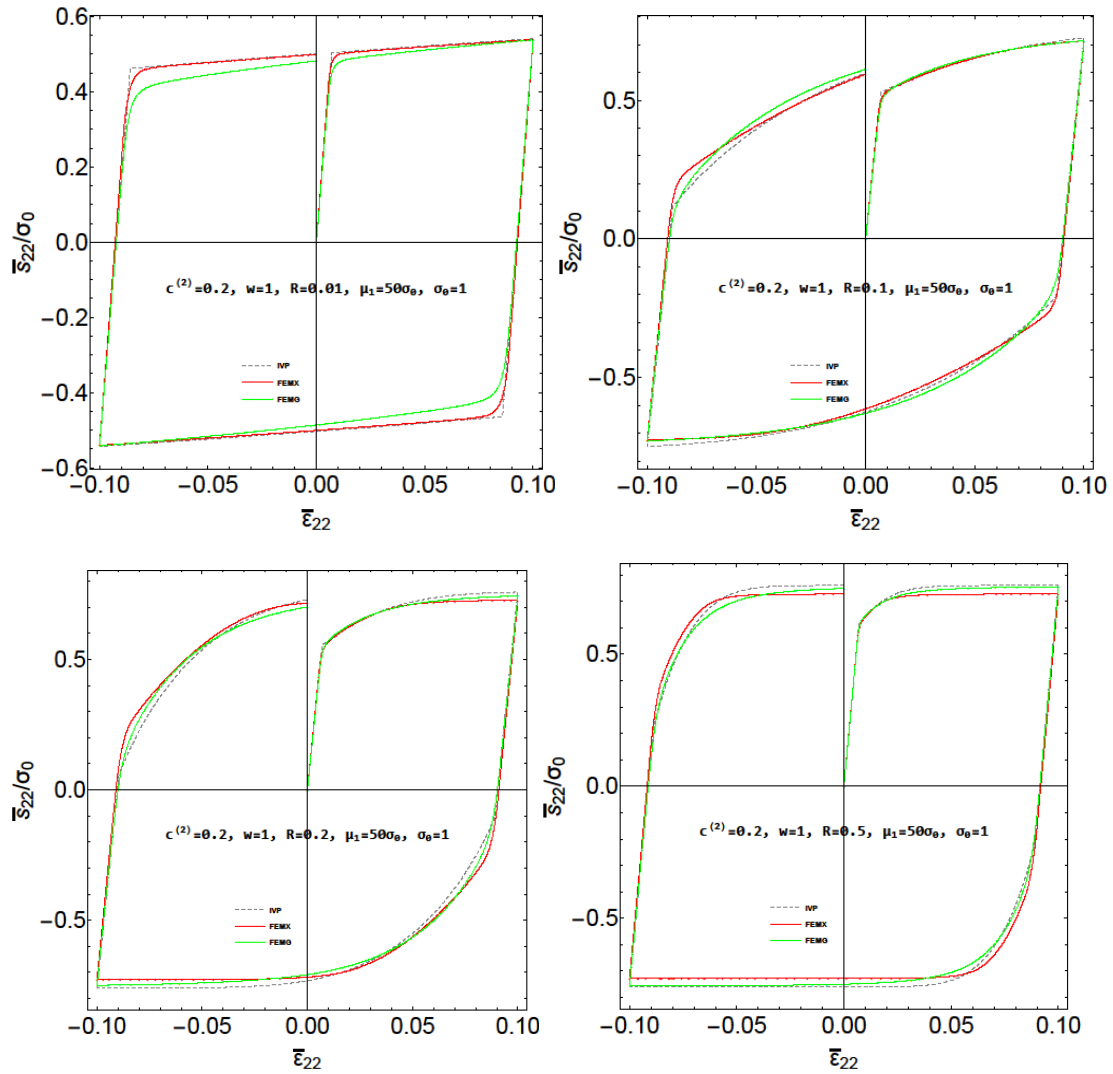
Σχήμα 4.3 : Μέση αξονική απόκριση των **σωματιδίων** σύνθετου υλικού αποτελούμενα από ελαστικά τέλεια πλαστικό φορέα και ελαστικά σφαιρικά σωματίδια με $c^{(2)}=20\%$, $\mu_1=50\sigma_0$, $\sigma_0=1$ που φορτίζεται με αξονοσυμμετρική παραμόρφωση στη διεύθυνση 2 για συντελεστή $R=\mu^{(2)}/\mu^{(1)}=0.01, 0.1, 0.2, 0.5$ αντίστοιχα



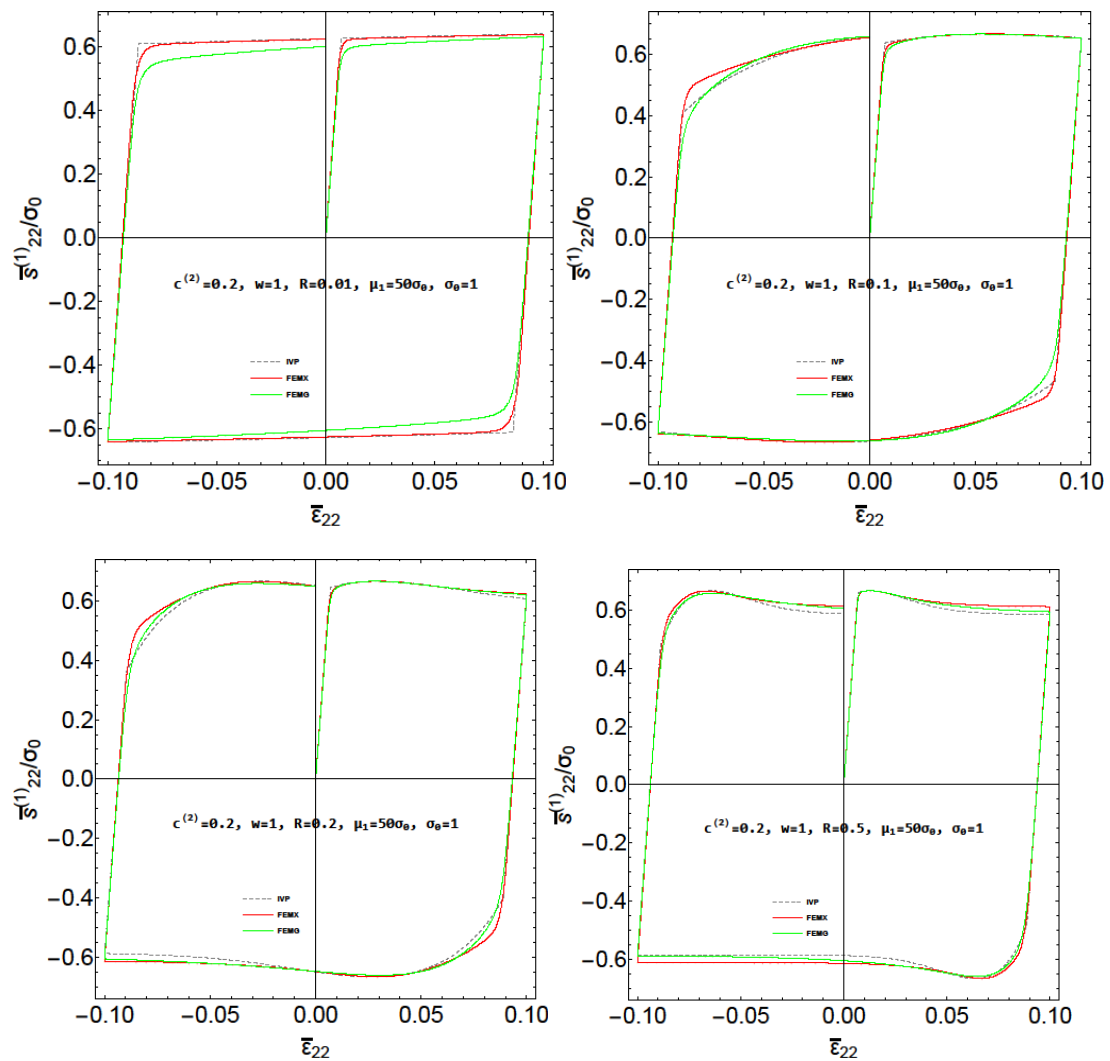
Σχήμα 4.4 : Τυπική απόκλιση του πεδίου των τάσεων του **φορέα** σύνθετου υλικού αποτελούμενα από ελαστικά τέλεια πλαστικό φορέα και ελαστικά σφαιρικά σωματίδια με $c^{(2)}=20\%, \mu_1=50\sigma_0, \sigma_0=1$ που φορτίζεται με αξονοσυμμετρική παραμόρφωση στη διεύθυνση 2 για συντελεστή $R = \mu^{(2)}/\mu^{(1)}=0.01, 0.1, 0.2, 0.5$ αντίστοιχα



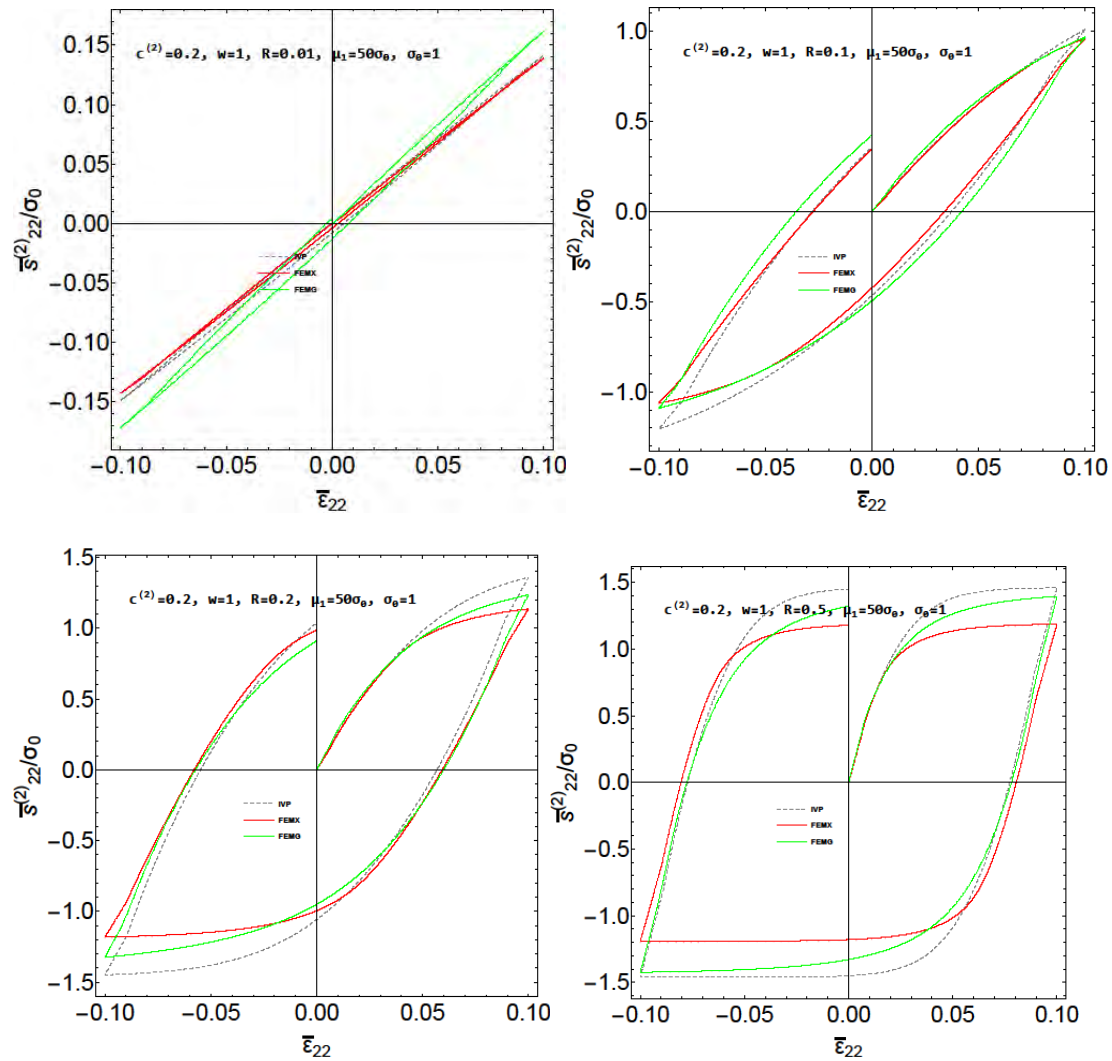
Σχήμα 4.5 : Τυπική απόκλιση του πεδίου των τάσεων των σωματιδίων σύνθετου υλικού αποτελούμενα από ελαστικά τέλεια πλαστικό φορέα και ελαστικά σφαιρικά σωματίδια με $c^{(2)}=20\%, \mu_1=50\sigma_0, \sigma_0=1$ που φορτίζεται με αξονοσυμμετρική παραμόρφωση στη διεύθυνση 2 για συντελεστή $R=\mu^{(2)}/\mu^{(1)}=0.01, 0.1, 0.2, 0.5$ αντίστοιχα



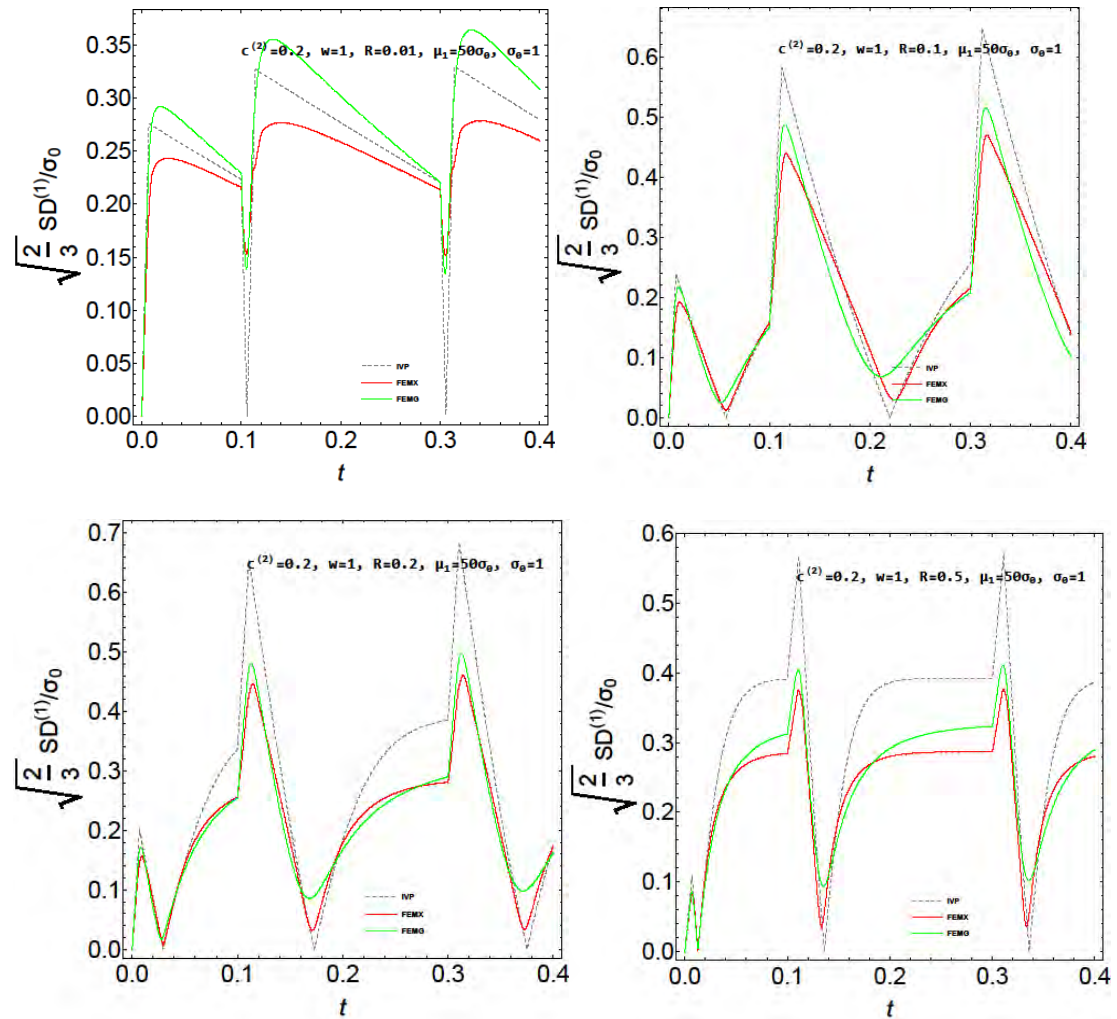
Σχήμα 4.6 : Σύγκριση αναλυτικών αποτελεσμάτων (IVP) με αντίστοιχα αριθμητικά αποτελέσματα για Μακροσκοπική αξονική απόκριση ενός σύνθετου υλικού αποτελούμενα από ελαστικά τέλεια πλαστικό φορέα και ελαστικά σφαιρικά σωματίδια με $c^{(2)}=20\%$, $\mu_1=50\sigma_0$, $\sigma_0=1$ που φορτίζεται με αξονοσυμμετρική παραμόρφωση στη διεύθυνση 2 για συντελεστή $R=\mu^{(2)}/\mu^{(1)}=0.01, 0.1, 0.2, 0.5$ αντίστοιχα



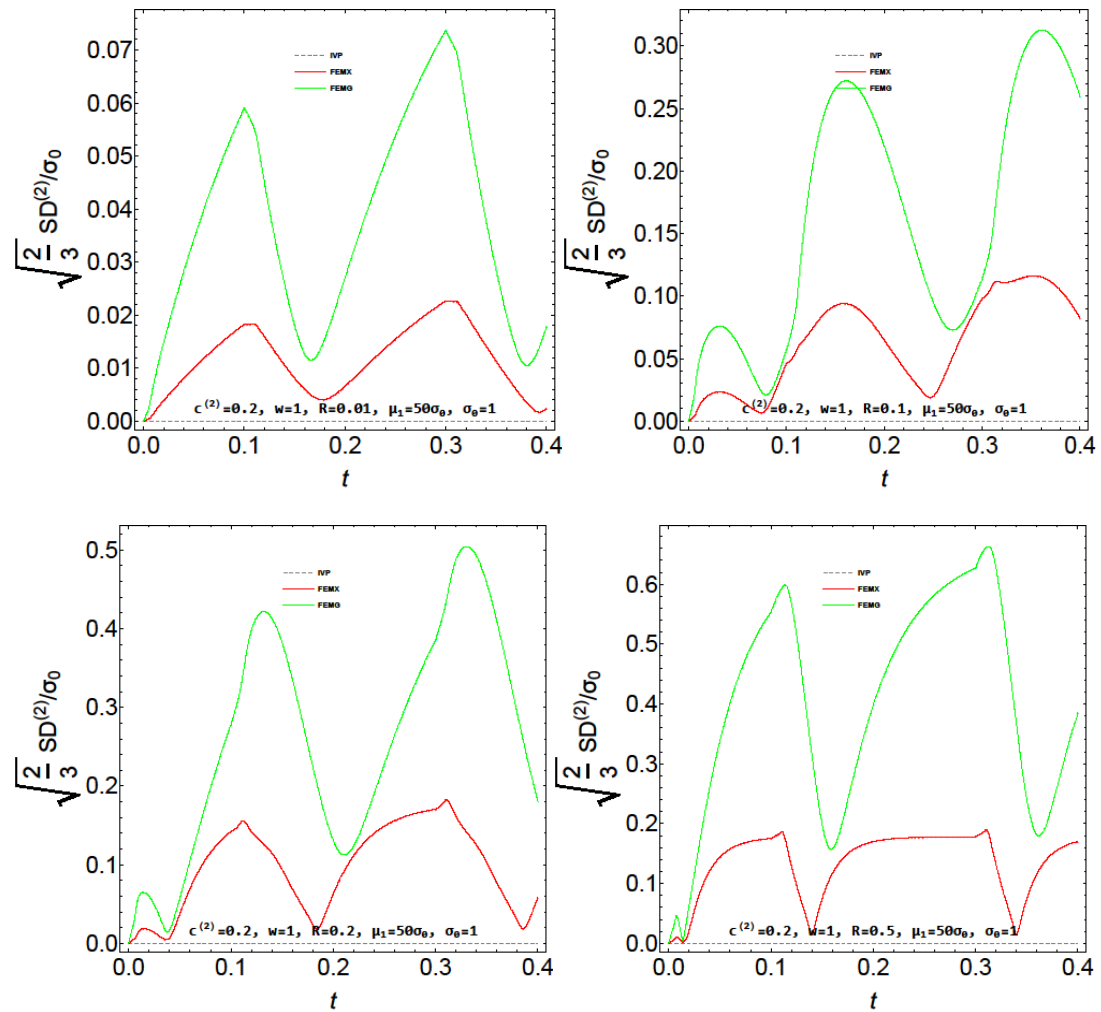
Σχήμα 4.7 : Σύγκριση αναλυτικών αποτελεσμάτων (IVP) με αντίστοιχα αριθμητικά αποτελέσματα για Μέση αξονική απόκριση του **φορέα** ενός σύνθετου υλικού αποτελούμενα από ελαστικά τέλεια πλαστικό φορέα και ελαστικά σφαιρικά σωματίδια με $c^{(2)}=20\%$, $\mu_1=50\sigma_0$, $\sigma_0=1$ που φορτίζεται με αξονοσυμμετρική παραμόρφωση στη διεύθυνση 2 για συντελεστή $R=\mu^{(2)}/\mu^{(1)}=0.01, 0.1, 0.2, 0.5$ αντίστοιχα



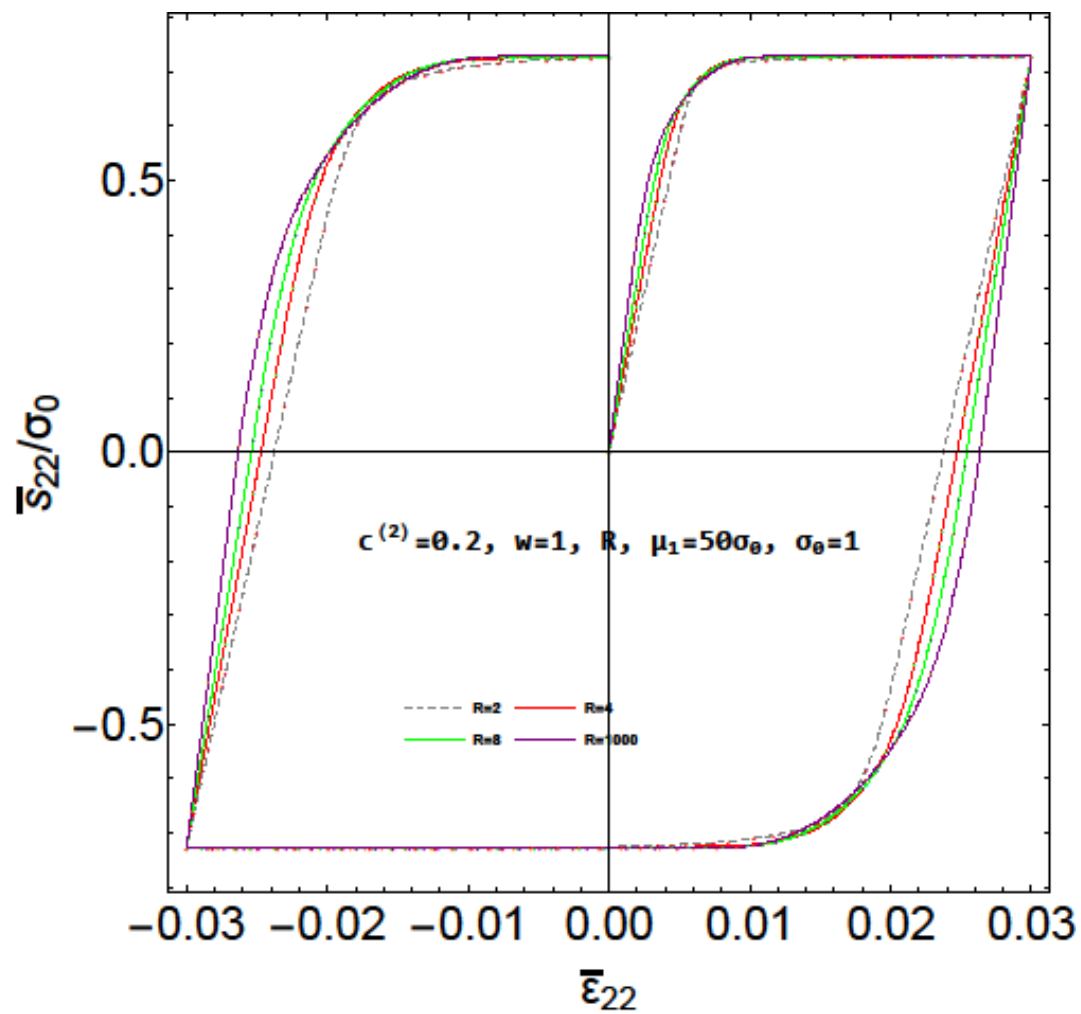
Σχήμα 4.8 : Σύγκριση αναλυτικών αποτελεσμάτων (IVP) με αντίστοιχα αριθμητικά αποτελέσματα για Μέση αξονική απόκριση των **σωματιδίων** ενός σύνθετου υλικού αποτελούμενα από ελαστικά τέλεια πλαστικό φορέα και ελαστικά σφαιρικά σωματίδια με $c^{(2)}=20\%$, $\mu_1=50\sigma_0$, $\sigma_0=1$ που φορτίζεται με αξονοσυμμετρική παραμόρφωση στη διεύθυνση 2 για συντελεστή $R=\mu^{(2)}/\mu^{(1)}=0.01, 0.1, 0.2, 0.5$ αντίστοιχα



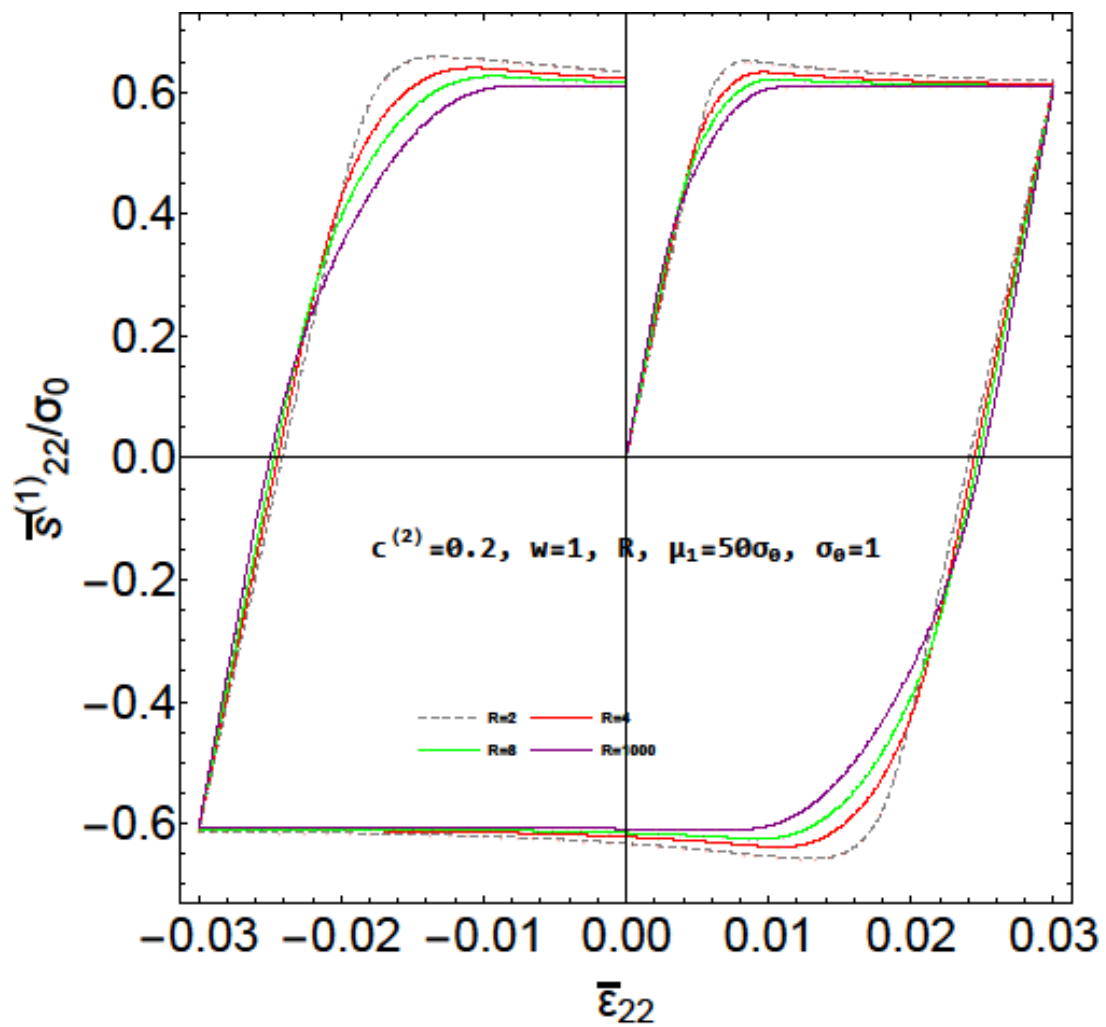
Σχήμα 4.9 : Σύγκριση αναλυτικών αποτελεσμάτων (IVP) με αντίστοιχα αριθμητικά αποτελέσματα για Τυπική απόκλιση του πεδίου των τάσεων του **φορέα** σύνθετου υλικού αποτελούμενα από ελαστικά τέλεια πλαστικό φορέα και ελαστικά σφαιρικά σωματίδια με $c^{(2)}=20\%, \mu_1=50 \sigma_0, \sigma_0=1$ που φορτίζεται με αξονοσυμμετρική παραμόρφωση στη διεύθυνση 2 για συντελεστή $R = \mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 0.01, 0.1, 0.2, 0.5$ αντίστοιχα



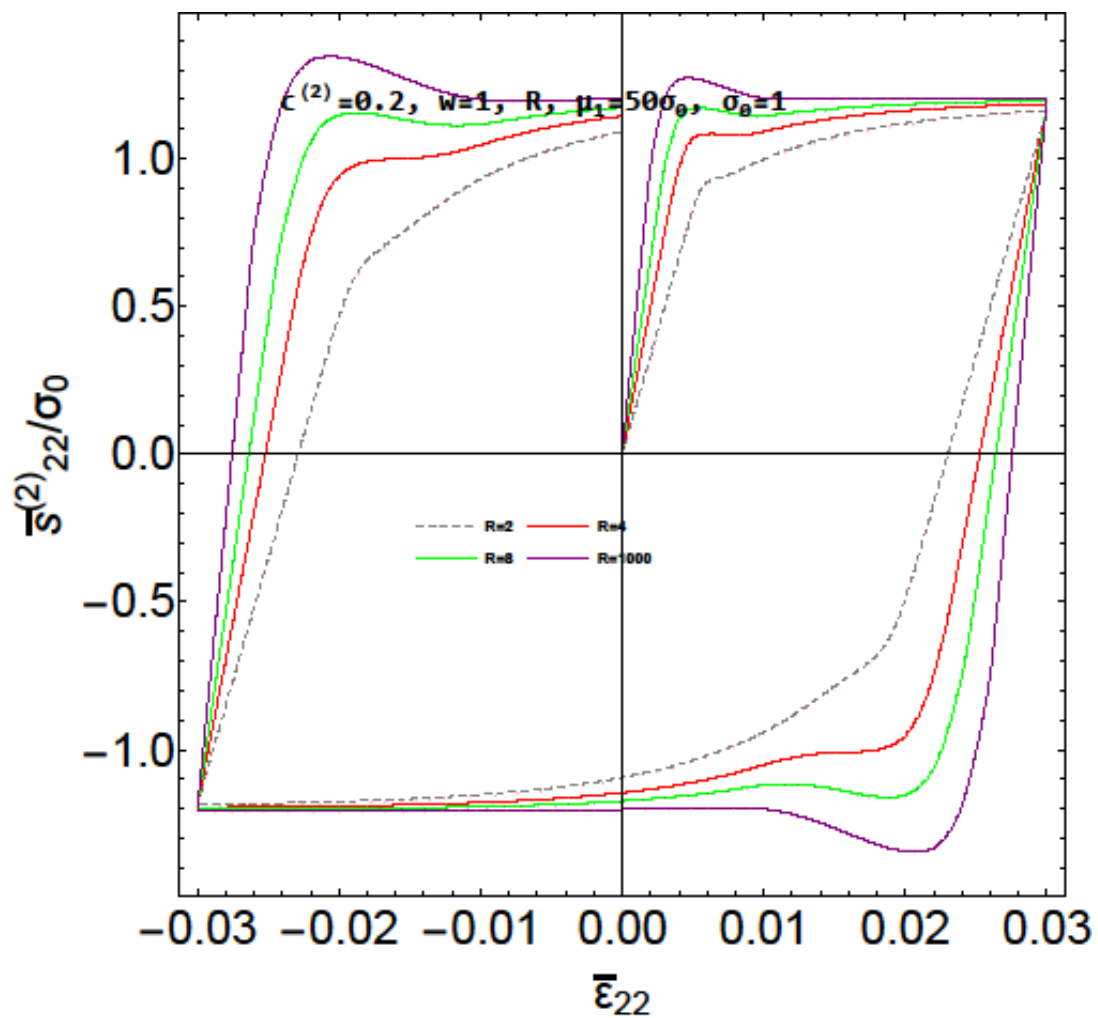
Σχήμα 4.10 : Σύγκριση αναλυτικών αποτελεσμάτων (IVP) με αντίστοιχα αριθμητικά αποτελέσματα για Τυπική απόκλιση του πεδίου των τάσεων των σωματιδίων σύνθετου υλικού αποτελούμενα από ελαστικά τέλεια πλαστικό φορέα και ελαστικά σφαιρικά σωματίδια με $c^{(2)}=20\%$, $\mu_1=50\sigma_0$, $\sigma_0=1$ που φορτίζεται με αξονοσυμμετρική παραμόρφωση στη διεύθυνση 2 για συντελεστή $R=\mu^{(2)}/\mu^{(1)}=0.01, 0.1, 0.2, 0.5$ αντίστοιχα



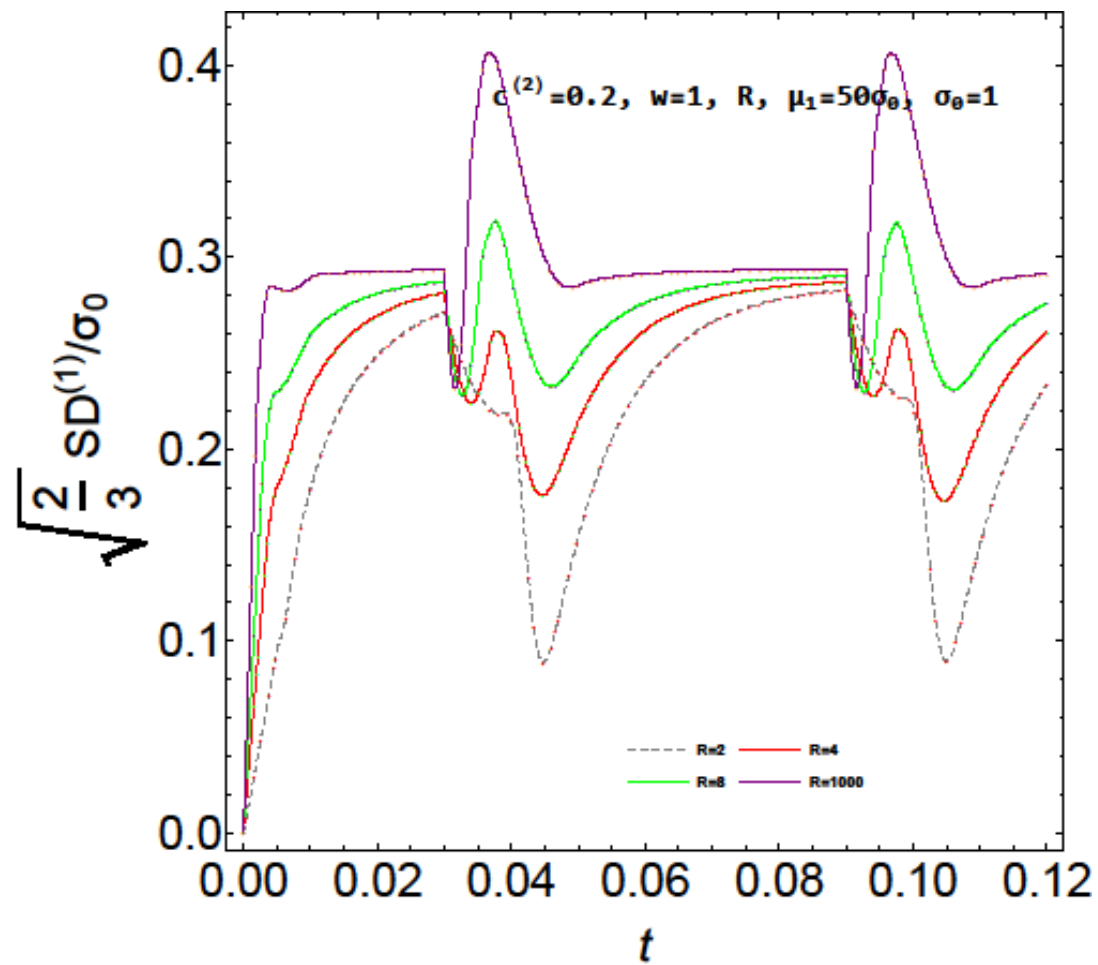
Σχήμα 4.11 : Μακροσκοπική αξονική απόκριση ενός σύνθετου υλικού αποτελούμενα από ελαστικά τέλεια πλαστικό φορέα και ελαστικά σφαιρικά σωματίδια με $c^{(2)}=20\%$, $\mu_1=50\sigma_0$, $\sigma_0=1$ που φορτίζεται με αξονοσυμμετρική παραμόρφωση στη διεύθυνση 2 για συντελεστή $R = \mu^{(2)}/\mu^{(1)}=2, 4, 8, 1000$ αντίστοιχα



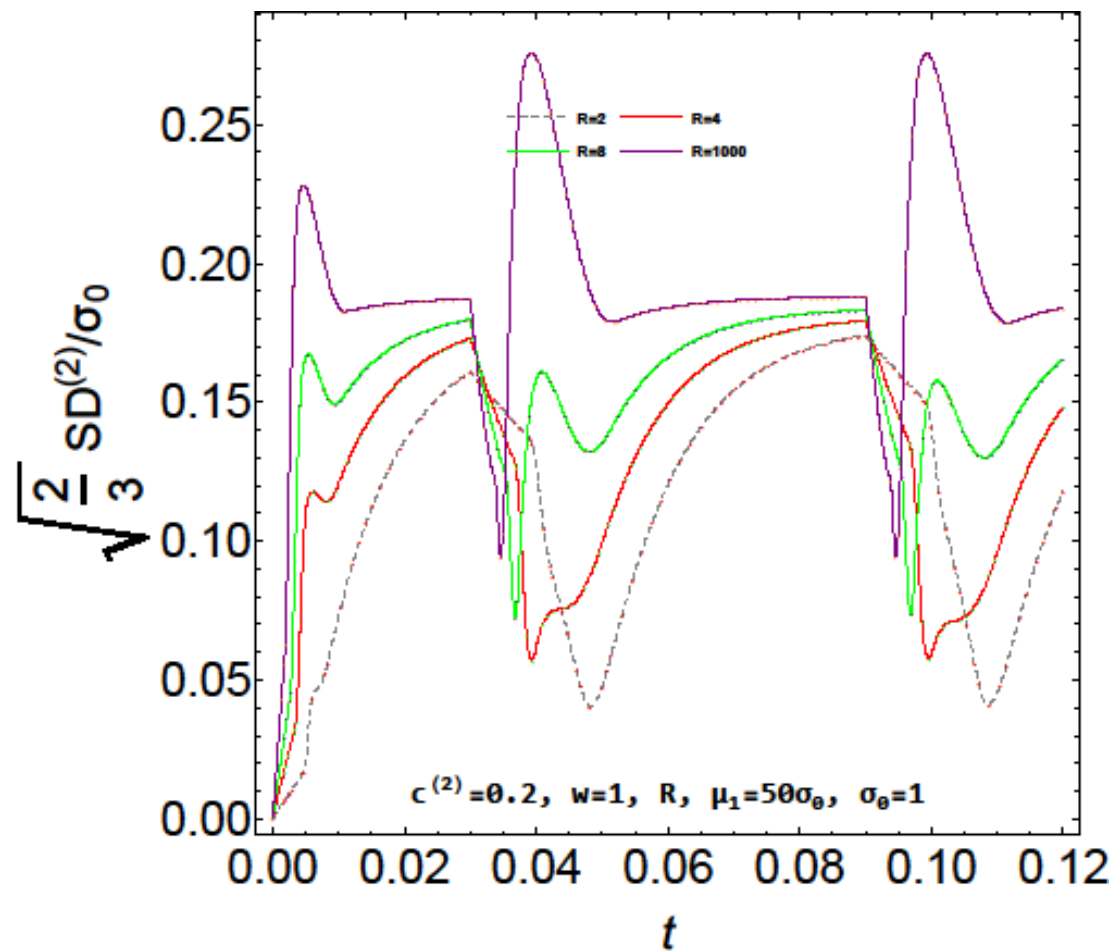
Σχήμα 4.12 : Μέση αξονική απόκριση του **φορέα** ενός σύνθετου υλικού αποτελούμενα από ελαστικά τέλεια πλαστικό φορέα και ελαστικά σφαιρικά σωματίδια με $c^{(2)}=20\%$, $\mu_1=50\sigma_0$, $\sigma_0=1$ που φορτίζεται με αξονοσυμμετρική παραμόρφωση στη διεύθυνση 2 για συντελεστή $R=\mu^{(2)}/\mu^{(1)}=2, 4, 8, 1000$ αντίστοιχα



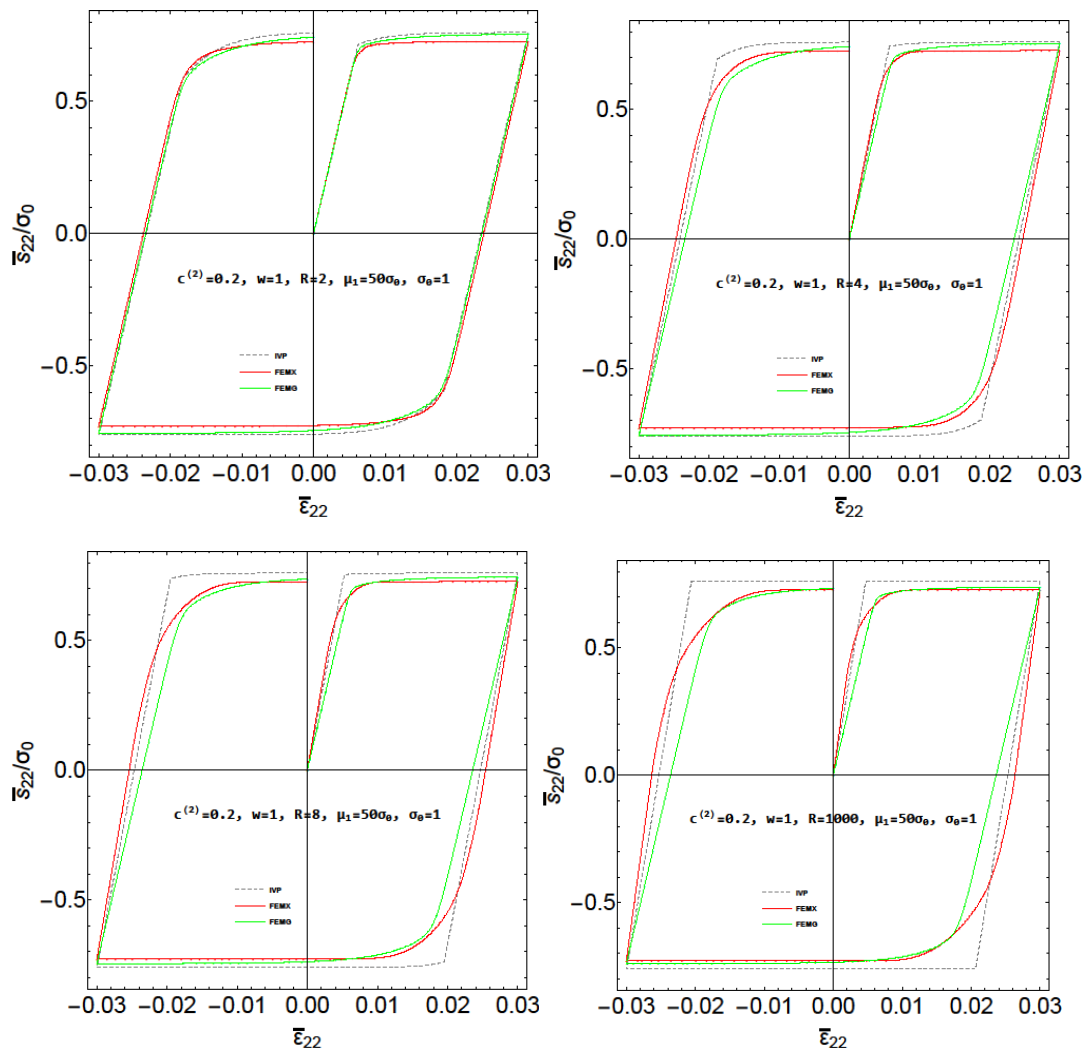
Σχήμα 4.13 : Μέση αξονική απόκριση των **σωματιδίων** ενός σύνθετου υλικού αποτελούμενα από ελαστικά τέλεια πλαστικό φορέα και ελαστικά σφαιρικά σωματίδια με $c^{(2)}=20\%$, $\mu_1=50\sigma_0$, $\sigma_0=1$ που φορτίζεται με αξονοσυμμετρική παραμόρφωση στη διεύθυνση 2 για συντελεστή $R=\mu^{(2)}/\mu^{(1)}=2, 4, 8, 1000$ αντίστοιχα



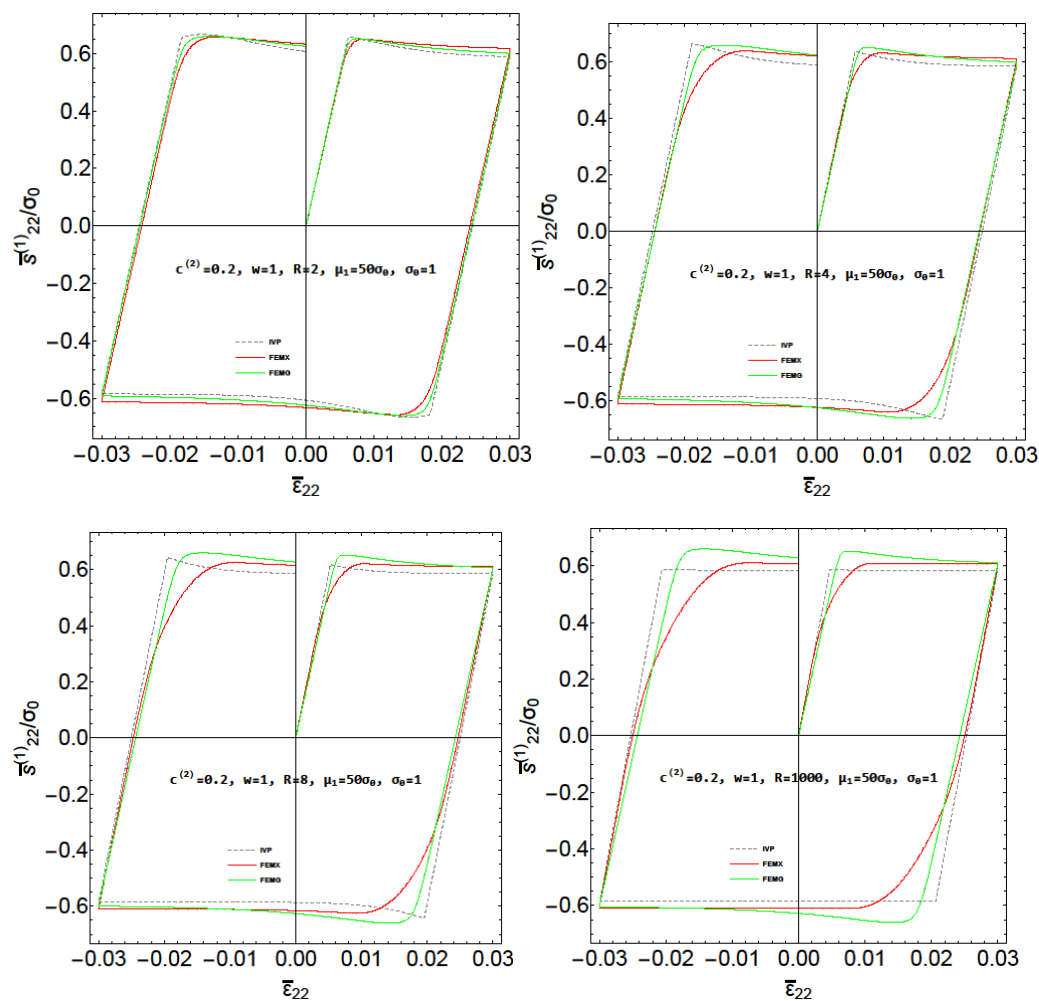
Σχήμα 4.14 : Τυπική απόκλιση του πεδίου των τάσεων του **φορέα** ενός σύνθετου υλικού αποτελούμενα από ελαστικά τέλεια πλαστικό φορέα και ελαστικά σφαιρικά σωματίδια με $c^{(2)}=20\%$, $\mu_1=50\sigma_0$, $\sigma_0=1$ που φορτίζεται με αξονοσυμμετρική παραμόρφωση στη διεύθυνση 2 για συντελεστή $R=\mu^{(2)}/\mu^{(1)}=2, 4, 8, 1000$ αντίστοιχα



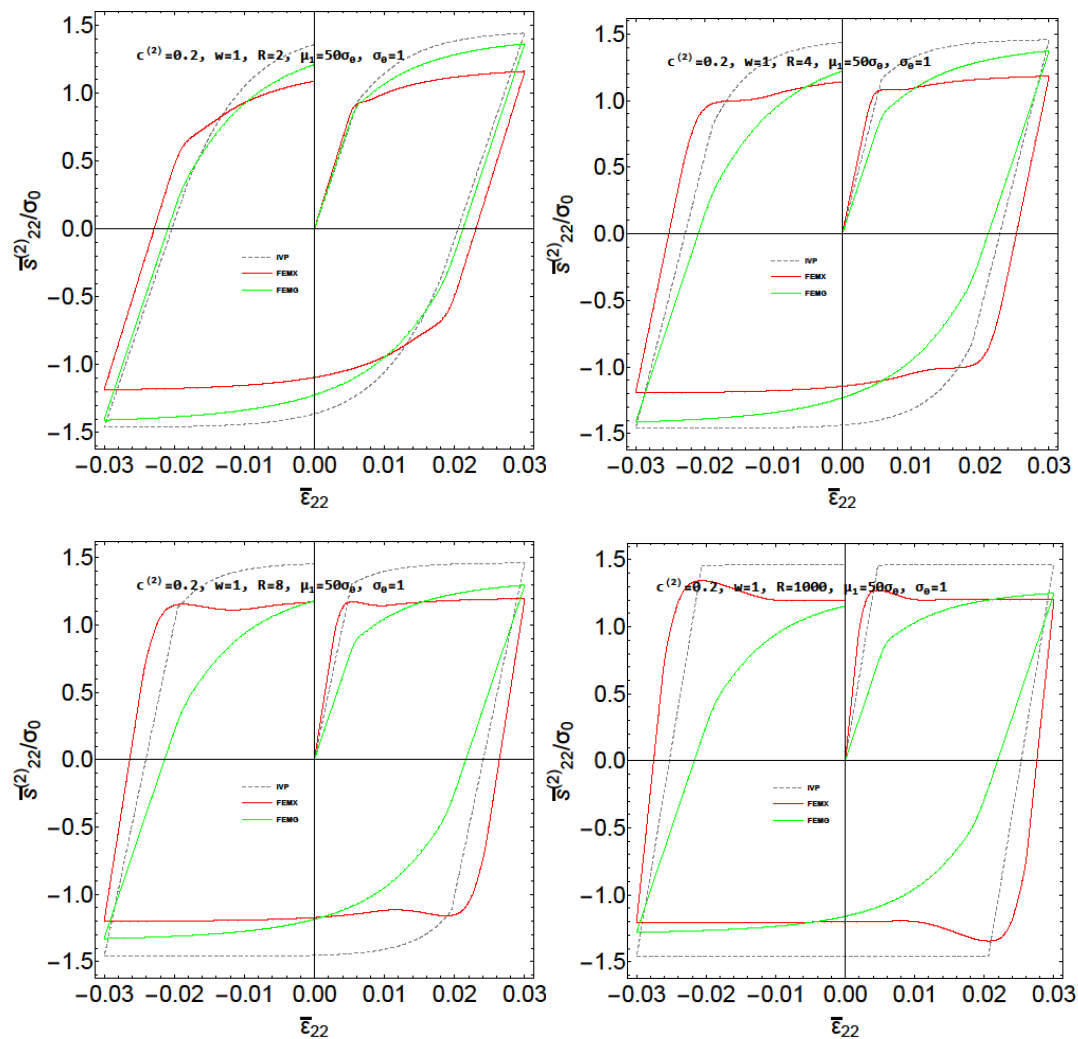
Σχήμα 4.15 : Τυπική απόκλιση του πεδίου των τάσεων των σωματιδίων ενός σύνθετου υλικού αποτελούμενα από ελαστικά τέλεια πλαστικό φορέα και ελαστικά σφαιρικά σωματίδια με $c^{(2)}=20\%$, $\mu_1=50\sigma_0$, $\sigma_0=1$ που φορτίζεται με αξονοσυμμετρική παραμόρφωση στη διεύθυνση 2 για συντελεστή $R=\mu^{(2)}/\mu^{(1)}=2, 4, 8, 1000$ αντίστοιχα



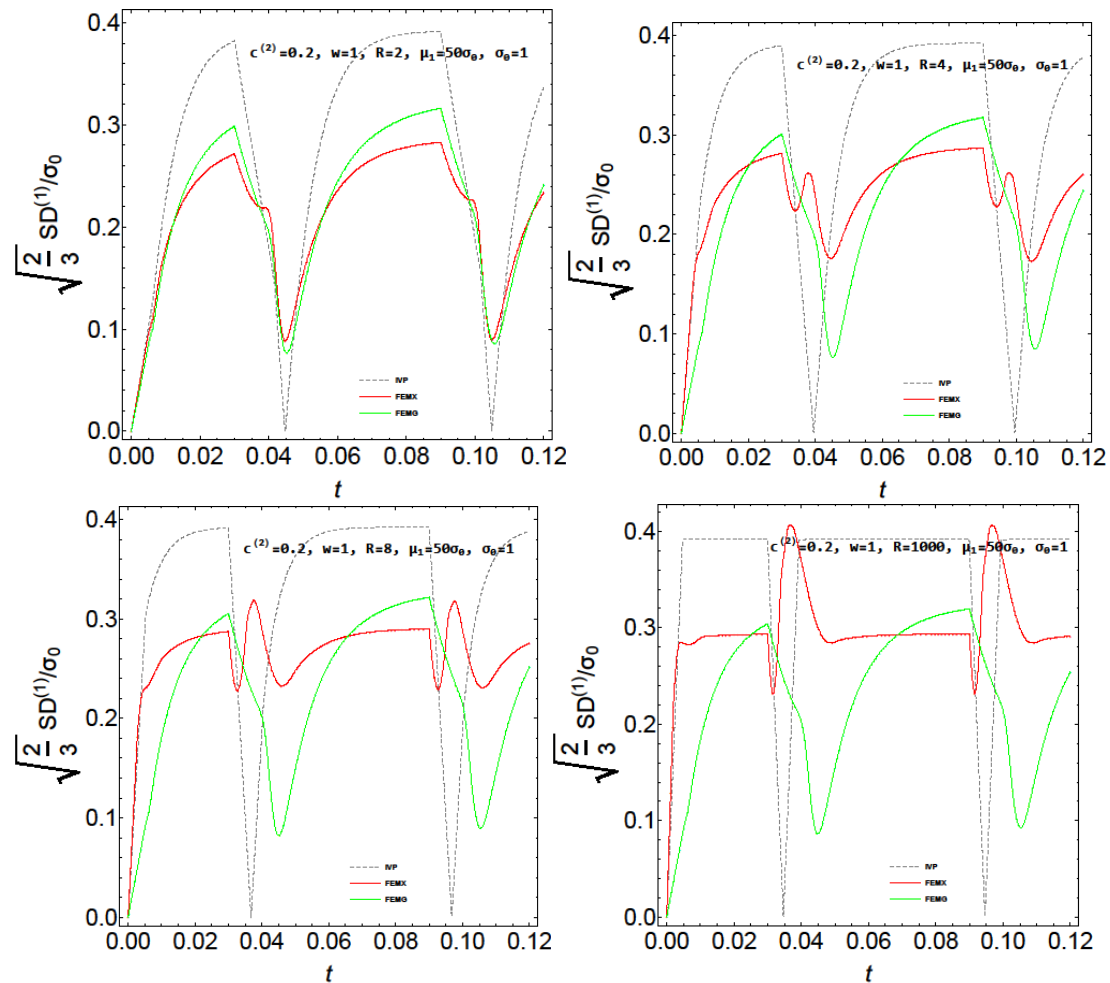
Σχήμα 4.16 : Σύγκριση αναλυτικών αποτελεσμάτων (IVP) με αντίστοιχα αριθμητικά αποτελέσματα για Μακροσκοπική αξονική απόκριση ενός σύνθετου υλικού αποτελούμενα από ελαστικά τέλεια πλαστικό φορέα και ελαστικά σφαιρικά σωματίδια με $c^{(2)}=20\%, \mu_1=50\sigma_0, \sigma_0=1$ που φορτίζεται με αξονοσυμμετρική παραμόρφωση στη διεύθυνση 2 για συντελεστή $R=\mu^{(2)}/\mu^{(1)}=2, 4, 8, 1000$ αντίστοιχα



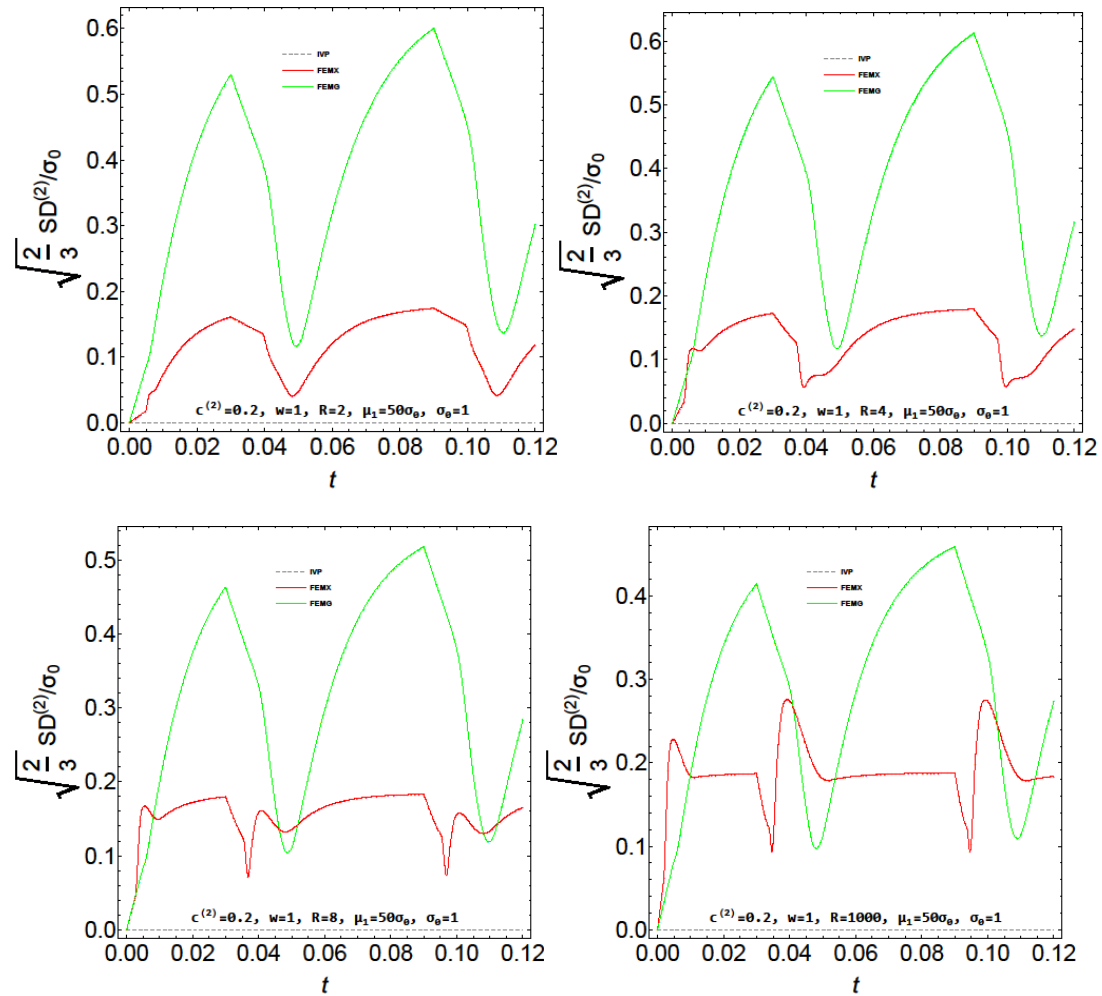
Σχήμα 4.17 : Σύγκριση αναλυτικών αποτελεσμάτων (IVP) με αντίστοιχα αριθμητικά αποτελέσματα για Μέση αξονική απόκριση του **φορέα** ενός σύνθετου υλικού αποτελούμενα από ελαστικά τέλεια πλαστικό φορέα και ελαστικά σφαιρικά σωματίδια με $c^{(2)}=20\%, \mu_1=50\sigma_0, \sigma_0=1$ που φορτίζεται με αξονοσυμμετρική παραμόρφωση στη διεύθυνση 2 για συντελεστή $R=\mu^{(2)}/\mu^{(1)}=2, 4, 8, 1000$ αντίστοιχα



Σχήμα 4.18 : Σύγκριση αναλυτικών αποτελεσμάτων (IVP) με αντίστοιχα αριθμητικά αποτελέσματα για Μέση αξονική απόκριση των **σωματιδίων** ενός σύνθετου υλικού αποτελούμενα από ελαστικά τέλεια πλαστικό φορέα και ελαστικά σφαιρικά σωματίδια με $c^{(2)}=20\%$, $\mu_1=50\sigma_0$, $\sigma_0=1$ που φορτίζεται με αξονοσυμμετρική παραμόρφωση στη διεύθυνση 2 για συντελεστή $R=\mu^{(2)}/\mu^{(1)}=2, 4, 8, 1000$ αντίστοιχα

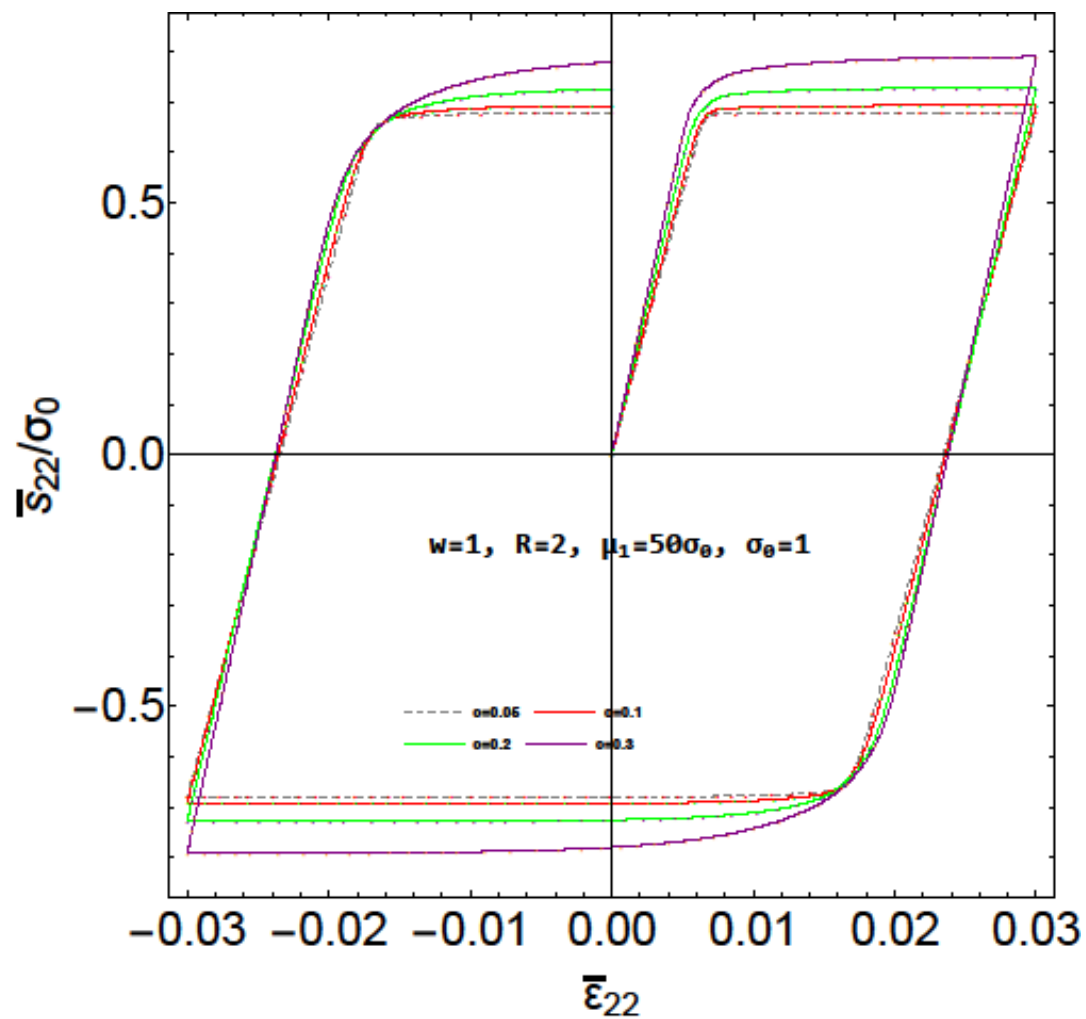


Σχήμα 4.19 : Σύγκριση αναλυτικών αποτελεσμάτων (IVP) με αντίστοιχα αριθμητικά αποτελέσματα για Τυπική απόκλιση του πεδίου των τάσεων του **φορέα** ενός σύνθετου υλικού αποτελούμενα από ελαστικά τέλεια πλαστικό φορέα και ελαστικά σφαιρικά σωματίδια με $c^{(2)} = 20\%$, $\mu_1 = 50 \sigma_0$, $\sigma_0 = 1$ που φορτίζεται με αξονοσυμμετρική παραμόρφωση στη διεύθυνση 2 για συντελεστή $R = \mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 2, 4, 8, 1000$ αντίστοιχα

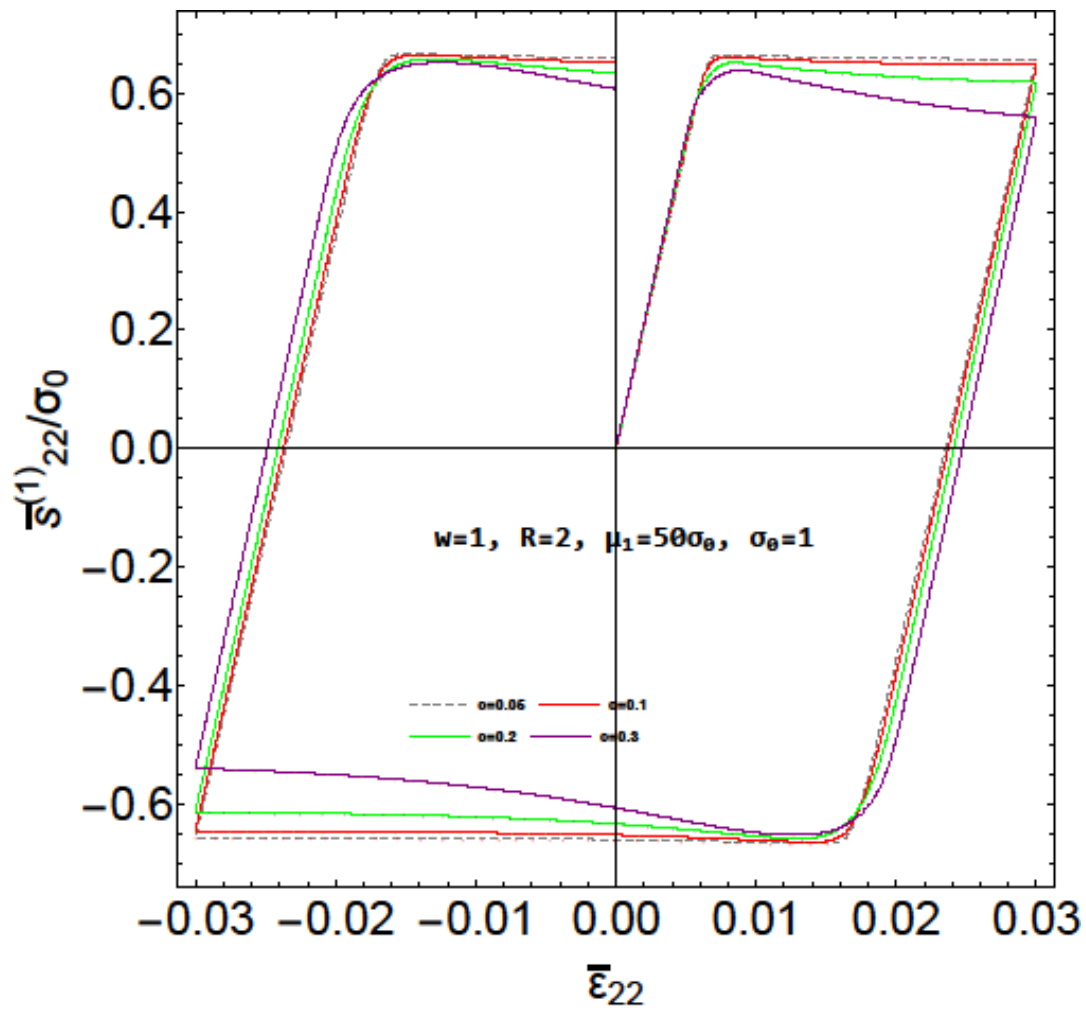


Σχήμα 4.20 : Σύγκριση αναλυτικών αποτελεσμάτων (IVP) με αντίστοιχα αριθμητικά αποτελέσματα για Τυπική απόκλιση του πεδίου των τάσεων των σωματιδίων ενός σύνθετου υλικού αποτελούμενα από ελαστικά τέλεια πλαστικό φορέα και ελαστικά σφαιρικά σωματίδια με $c^{(2)}=20\%$, $\mu_1=50\sigma_0$, $\sigma_0=1$ που φορτίζεται με αξονοσυμμετρική παραμόρφωση στη διεύθυνση 2 για συντελεστή $R = \mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 2, 4, 8, 1000$ αντίστοιχα

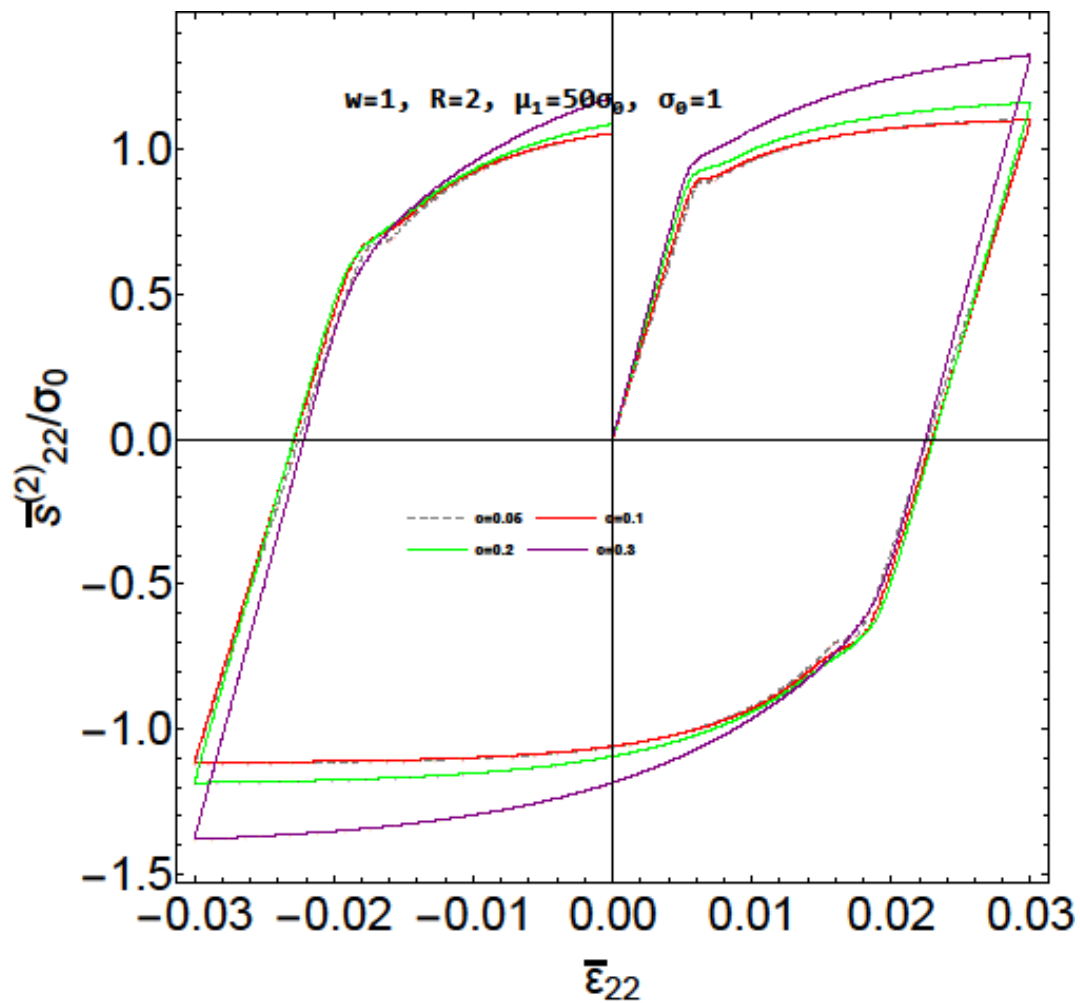
4.2 Επίδραση της συγκέντρωσης των σωματιδίων c



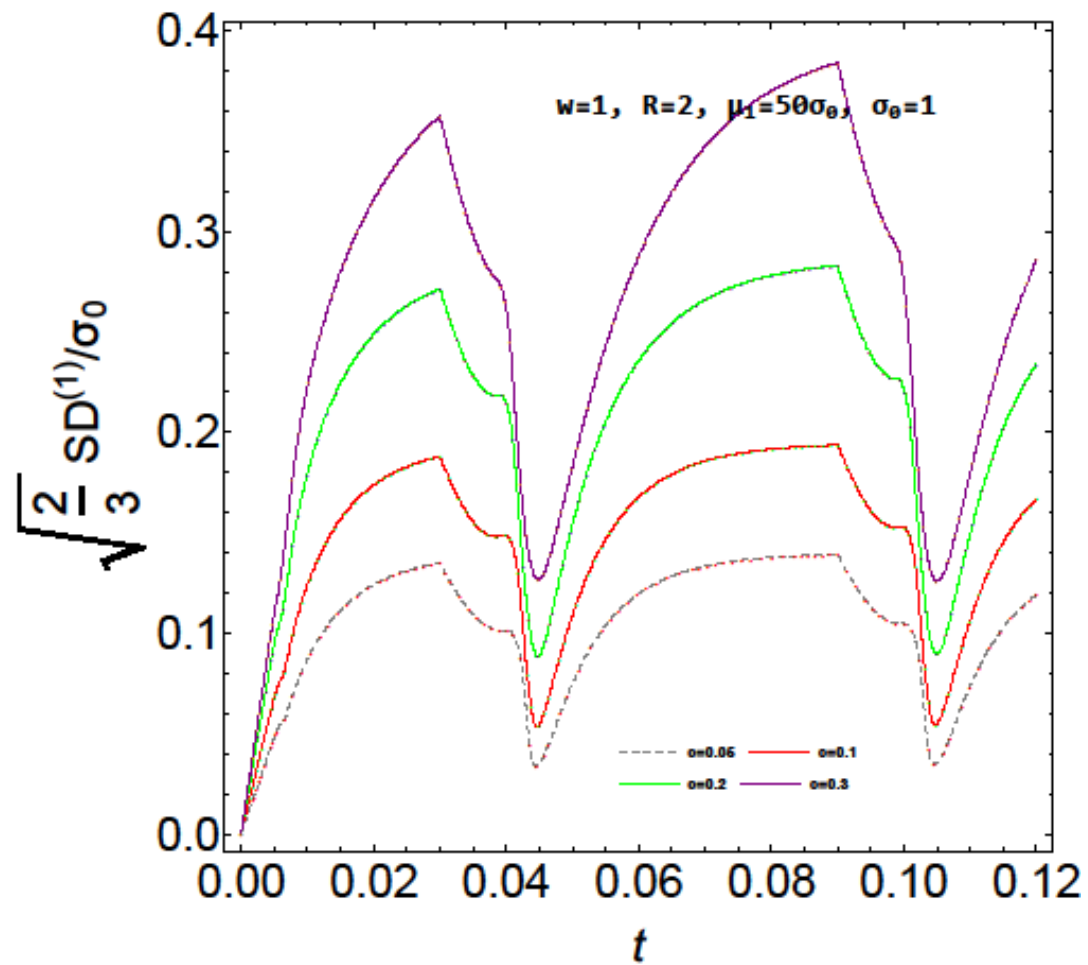
Σχήμα 4.21 : Μακροσκοπική αξονική απόκριση ενός σύνθετου υλικού αποτελούμενου από ελαστικά τέλεια πλαστικό φορέα και ελαστικά σφαιρικά σωματίδιο με $R=2, \mu_1=50\sigma_0, \sigma_0=1$ που φορτίζεται με αξονοσυμμετρική παραμόρφωση στη διεύθυνση 2 για συγκέντρωση $c=0.05, 0.1, 0.2, 0.3$ αντίστοιχα



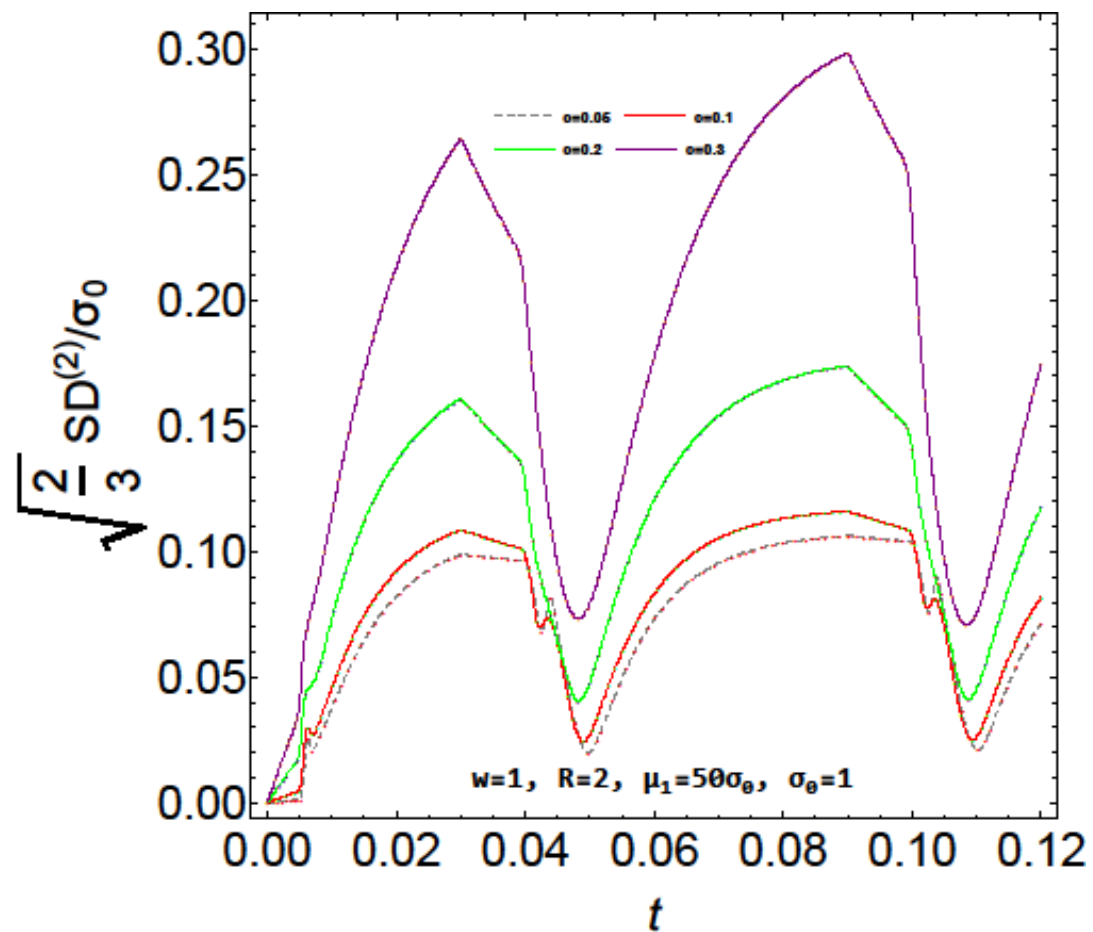
Σχήμα 4.22 : Μέση αξονική απόκριση του **φορέα** ενός σύνθετου υλικού αποτελούμενου από ελαστικά τέλεια πλαστικό φορέα και ελαστικά σφαιρικά σωματίδιο με $R=2, \mu_1=50\sigma_0, \sigma_0=1$ που φορτίζεται με αξονοσυμμετρική παραμόρφωση στη διεύθυνση 2 για συγκέντρωση $c=0.05, 0.1, 0.2, 0.3$ αντίστοιχα



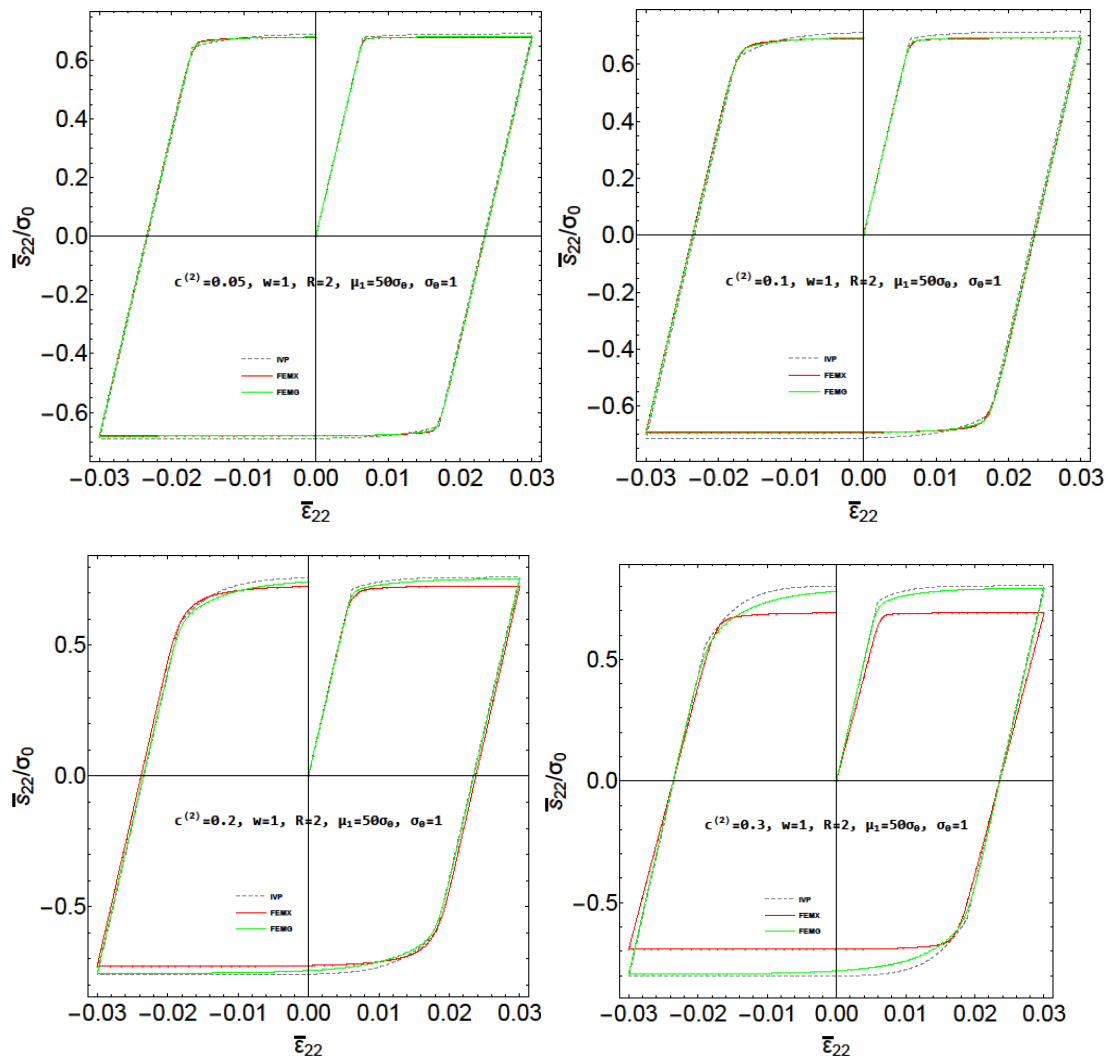
Σχήμα 4.23 : Μέση αξονική απόκριση των σωματιδίων ενός σύνθετου υλικού αποτελούμενου από ελαστικά τέλεια πλαστικό φορέα και ελαστικά σφαιρικά σωματίδιο με $R=2, \mu_1=50 \sigma_0, \sigma_0=1$ που φορτίζεται με αξονοσυμμετρική παραμόρφωση στη διεύθυνση 2 για συγκέντρωση $c=0.05, 0.1, 0.2, 0.3$ αντίστοιχα



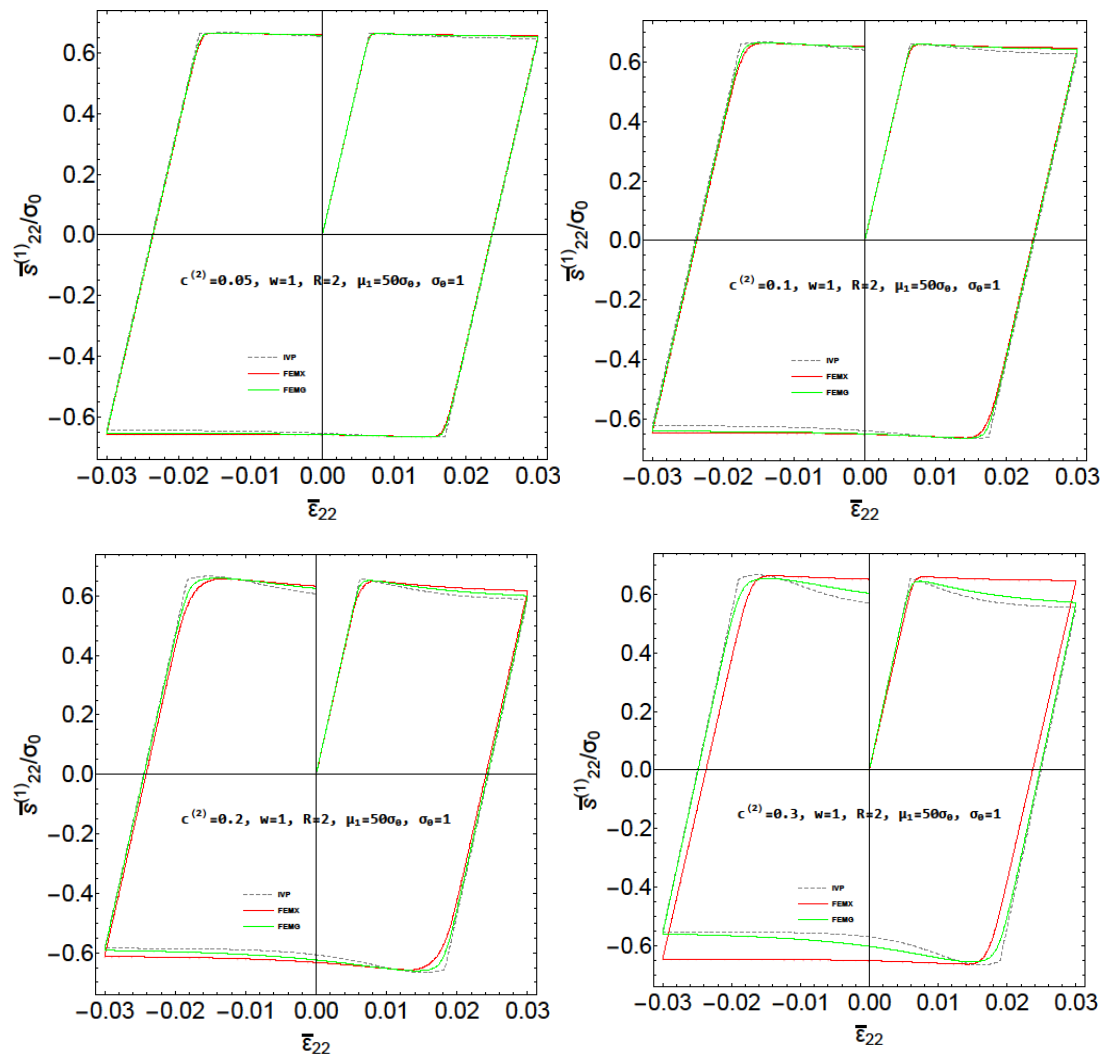
Σχήμα 4.24 : Τυπική απόκλιση του πεδίου των τάσεων του **φορέα** ενός σύνθετου υλικού αποτελούμενου από ελαστικά τέλεια πλαστικό φορέα και ελαστικά σφαιρικά σωματίδια με $R=2, \mu_1=50\sigma_0, \sigma_0=1$ που φορτίζεται με αξονοσυμμετρική παραμόρφωση στη διεύθυνση 2 για συγκέντρωση $c=0.05, 0.1, 0.2, 0.3$ αντίστοιχα



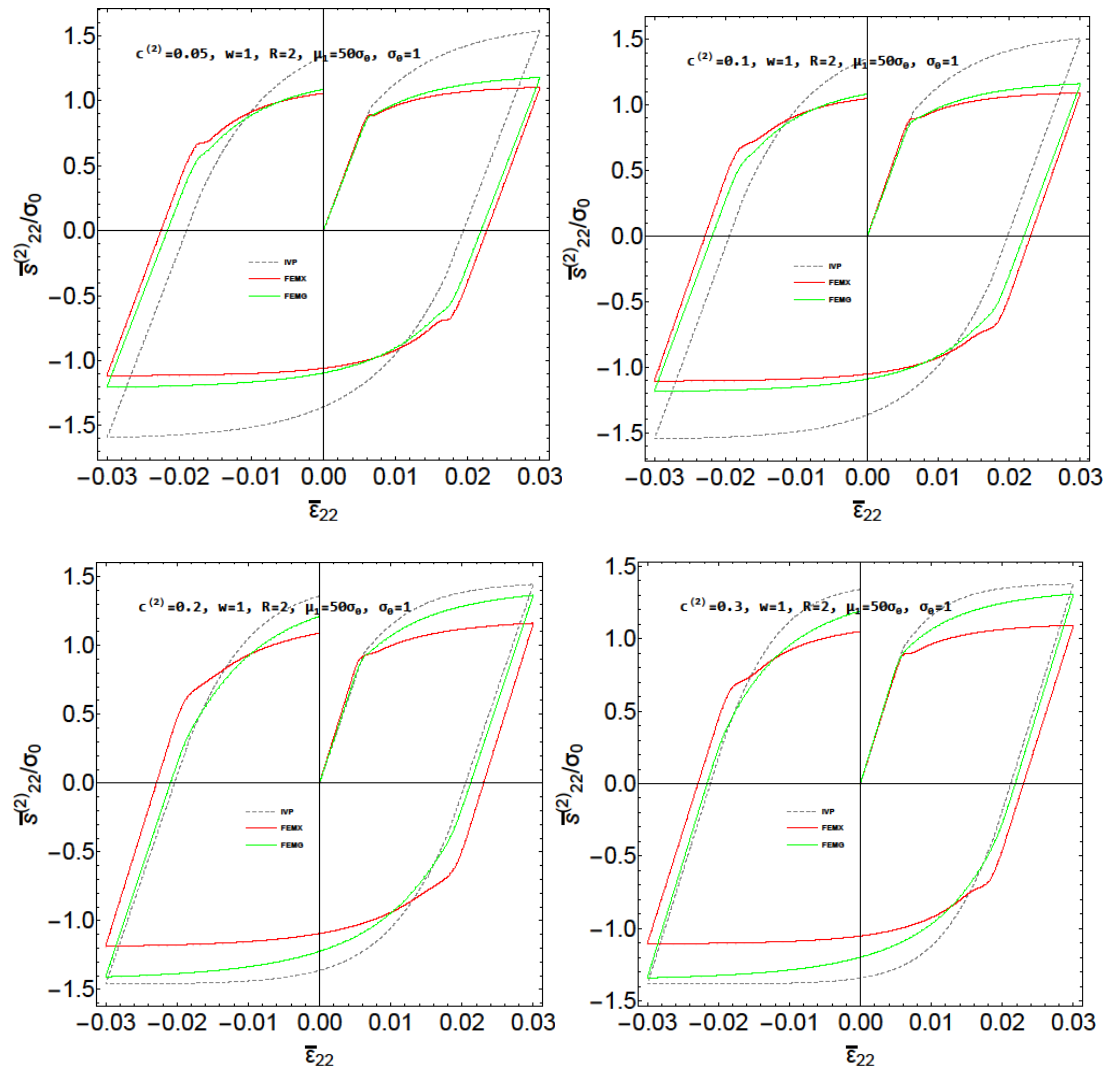
Σχήμα 4.25 : Τυπική απόκλιση του πεδίου των τάσεων του **σωματιδίου** ενός σύνθετου υλικού αποτελούμενου από ελαστικά τέλεια πλαστικό φορέα και ελαστικά σφαιρικά σωματίδια με $R=2, \mu_1=50 \sigma_0, \sigma_0=1$ που φορτίζεται με αξονοσυμμετρική παραμόρφωση στη διεύθυνση 2 για συγκέντρωση $c=0.05, 0.1, 0.2, 0.3$ αντίστοιχα



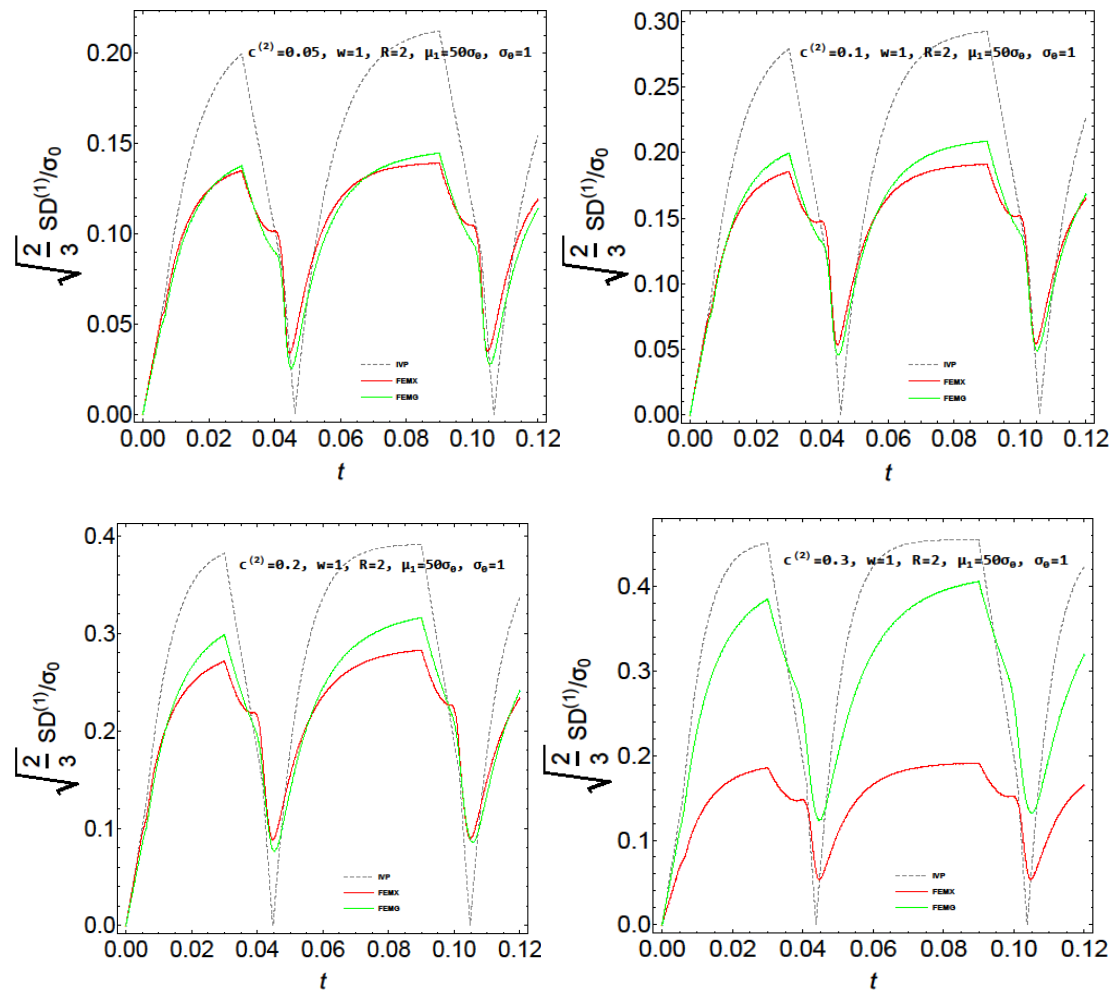
Σχήμα 4.26 : Σύγκριση αναλυτικών αποτελεσμάτων (IVP) με αντίστοιχα αριθμητικά αποτελέσματα για Μακροσκοπική αξονική απόκριση ενός σύνθετου υλικού αποτελούμενου από ελαστικά τέλεια πλαστικό φορέα και ελαστικά σφαιρικά σωματίδια με $R=2, \mu_1=50 \sigma_0, \sigma_0=1$ που φορτίζεται με αξονοσυμμετρική παραμόρφωση στη διεύθυνση 2 για συγκέντρωση $c = 0.05, 0.1, 0.2, 0.3$ αντίστοιχα



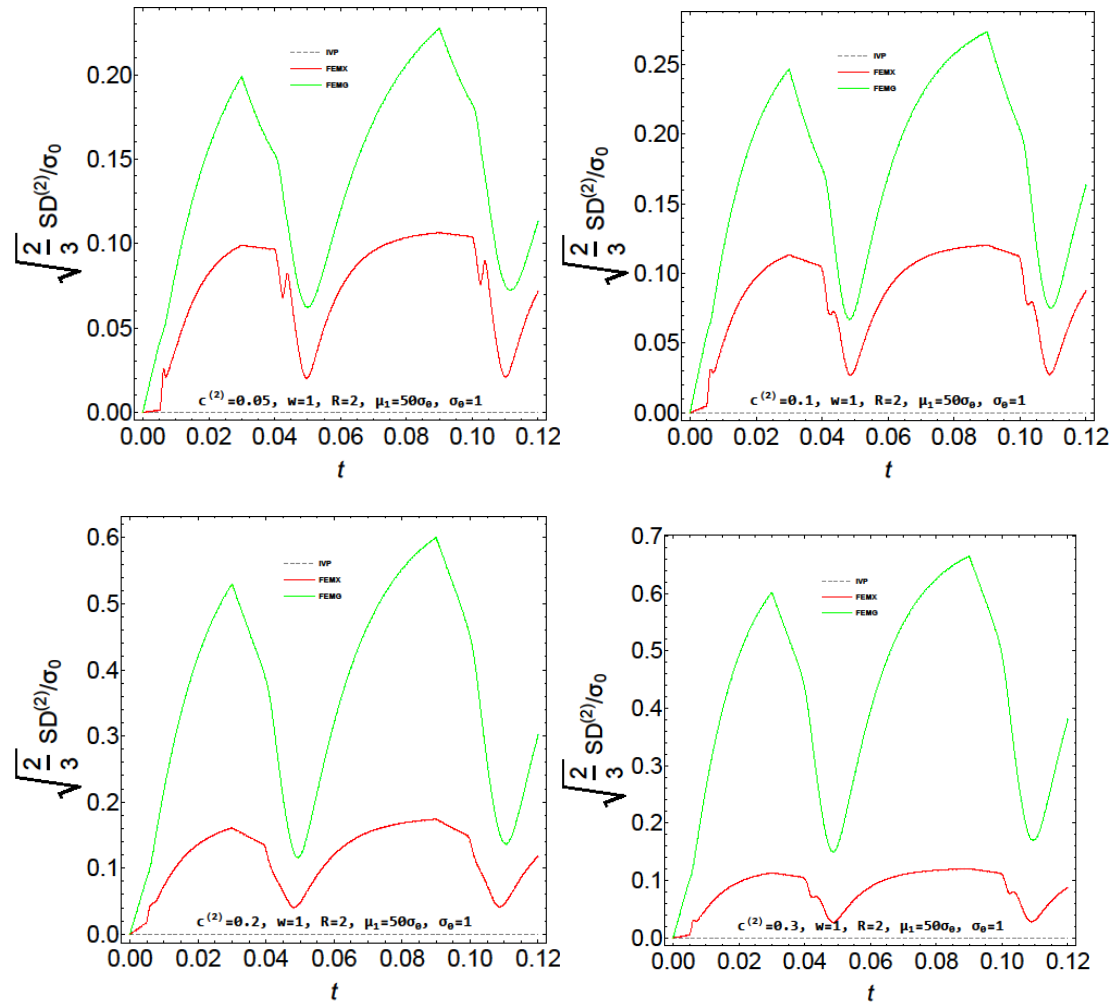
Σχήμα 4.27 : Σύγκριση αναλυτικών αποτελεσμάτων (IVP) με αντίστοιχα αριθμητικά αποτελέσματα για Μέση αξονική απόκριση του **φορέα** ενός σύνθετου υλικού αποτελούμενου από ελαστικά τέλεια πλαστικό φορέα και ελαστικά σφαιρικά σωματίδια με $R=2, \mu_1=50 \sigma_0, \sigma_0=1$ που φορτίζεται με αξονοσυμμετρική παραμόρφωση στη διεύθυνση 2 για συγκέντρωση $c=0.05, 0.1, 0.2, 0.3$ αντίστοιχα



Σχήμα 4.28 : Σύγκριση αναλυτικών αποτελεσμάτων (IVP) με αντίστοιχα αριθμητικά αποτελέσματα για Μέση αξονική απόκριση των σωματιδίων ενός σύνθετου υλικού αποτελούμενου από ελαστικά τέλεια πλαστικό φορέα και ελαστικά σφαιρικά σωματίδια με $R=2, \mu_1=50 \sigma_0, \sigma_0=1$ που φορτίζεται με αξονοσυμμετρική παραμόρφωση στη διεύθυνση 2 για συγκέντρωση $c=0.05, 0.1, 0.2, 0.3$ αντίστοιχα

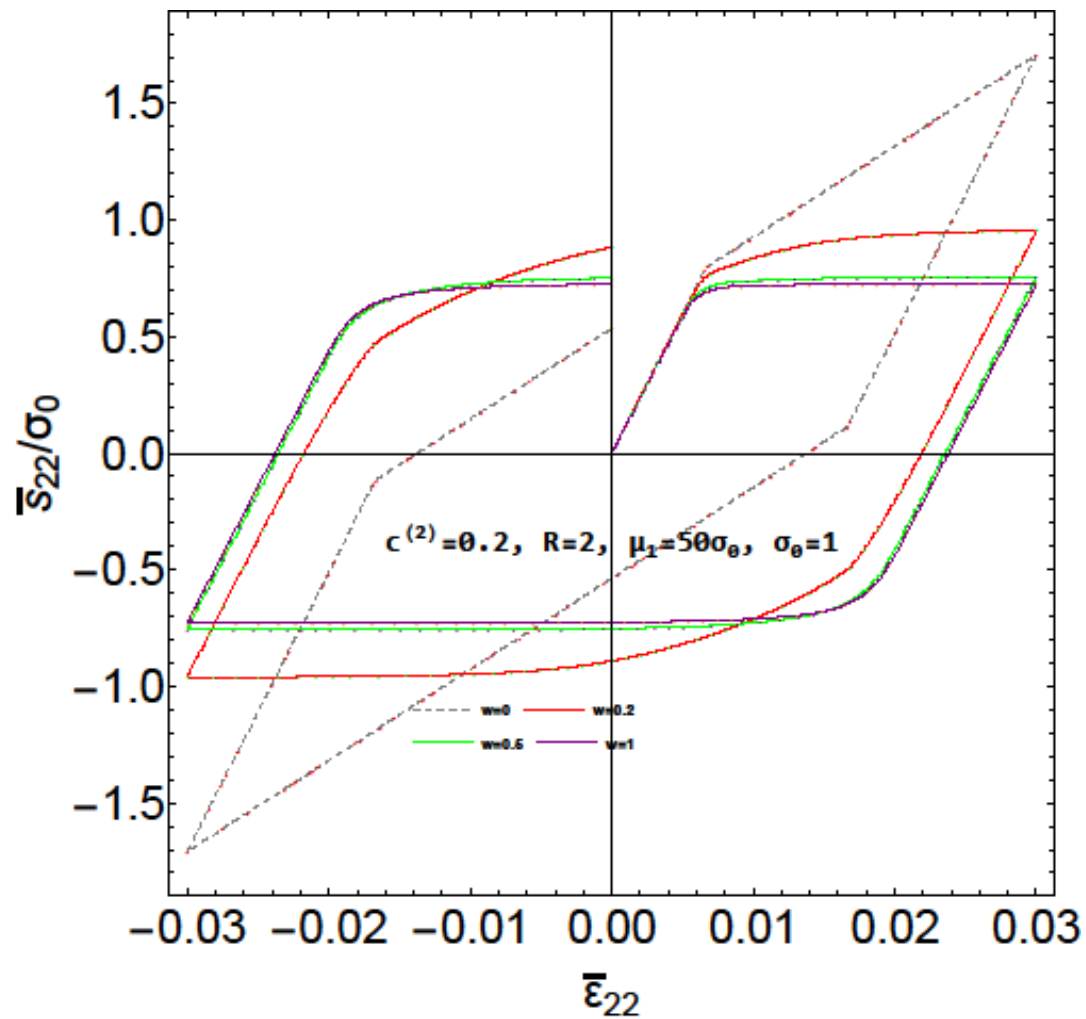


Σχήμα 4.29 : Σύγκριση αναλυτικών αποτελεσμάτων (IVP) με αντίστοιχα αριθμητικά αποτελέσματα για Τυπική απόκλιση του πεδίου των τάσεων του **φορέα** ενός σύνθετου υλικού αποτελούμενου από ελαστικά τέλεια πλαστικό φορέα και ελαστικά σφαιρικά σωματίδια με $R=2, \mu_1=50\sigma_0$, $\sigma_0=1$ που φορτίζεται με αξονοσυμμετρική παραμόρφωση στη διεύθυνση 2 για συγκέντρωση $c=0.05, 0.1, 0.2, 0.3$ αντίστοιχα

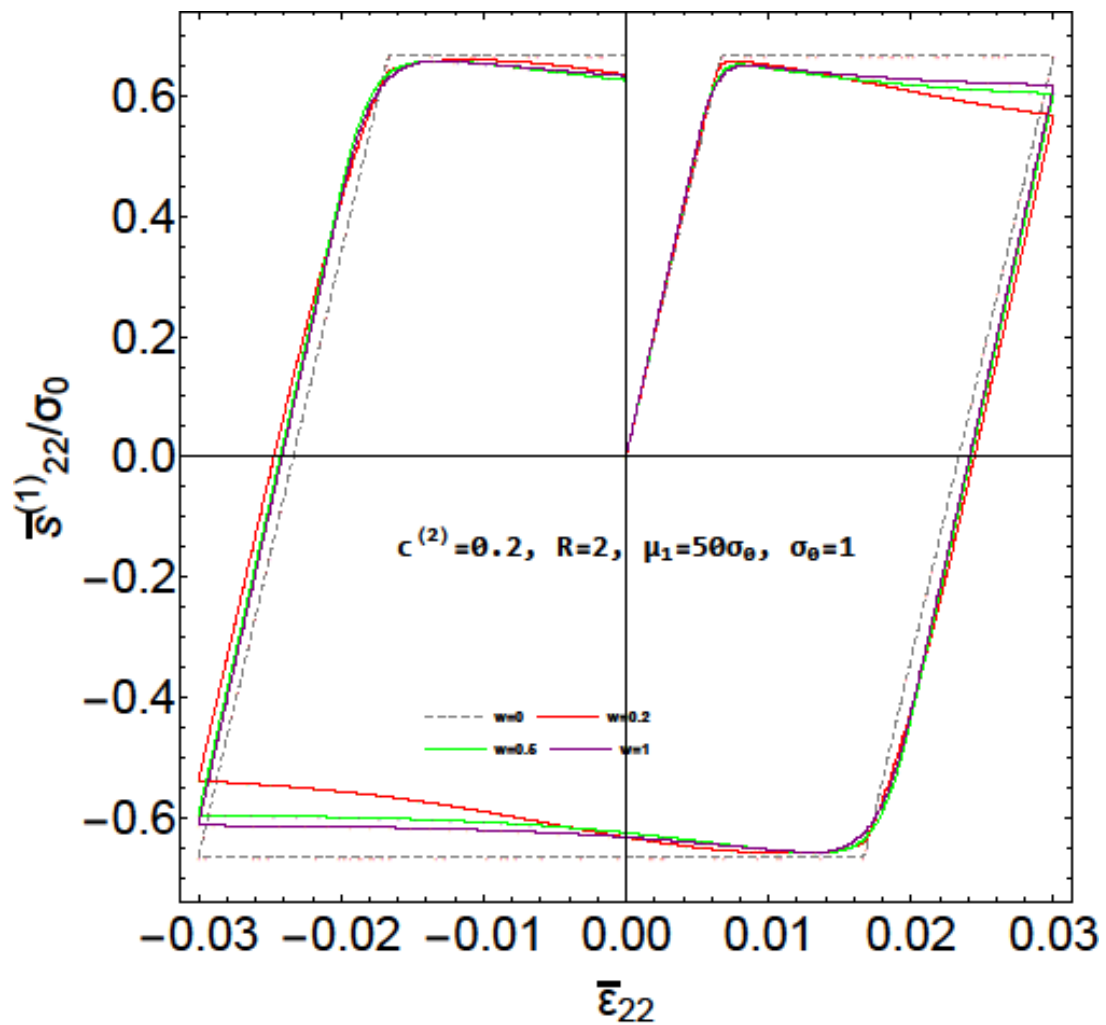


Σχήμα 4.30 : Σύγκριση αναλυτικών αποτελεσμάτων (IVP) με αντίστοιχα αριθμητικά αποτελέσματα για Τυπική απόκλιση του πεδίου των τάσεων του **σωματιδίου** ενός σύνθετου υλικού αποτελούμενου από ελαστικά τέλεια πλαστικό φορέα και ελαστικά σφαιρικά σωματίδια με $R=2, \mu_1=50\sigma_0, \sigma_0=1$ που φορτίζεται με αξονοσυμμετρική παραμόρφωση στη διεύθυνση 2 για συγκέντρωση $c=0.05, 0.1, 0.2, 0.3$ αντίστοιχα

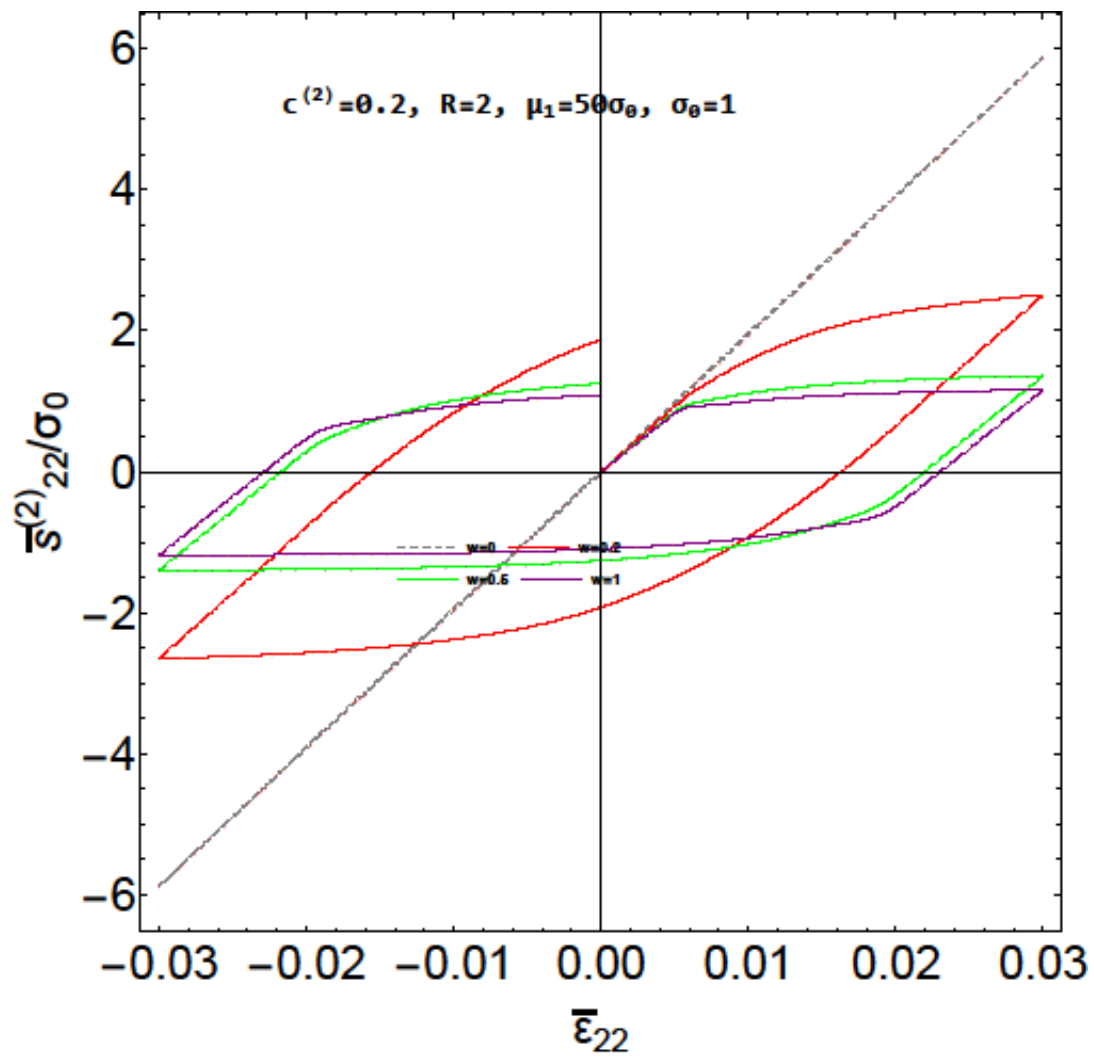
4.3 Επίδραση της μορφής των σωματιδίων w



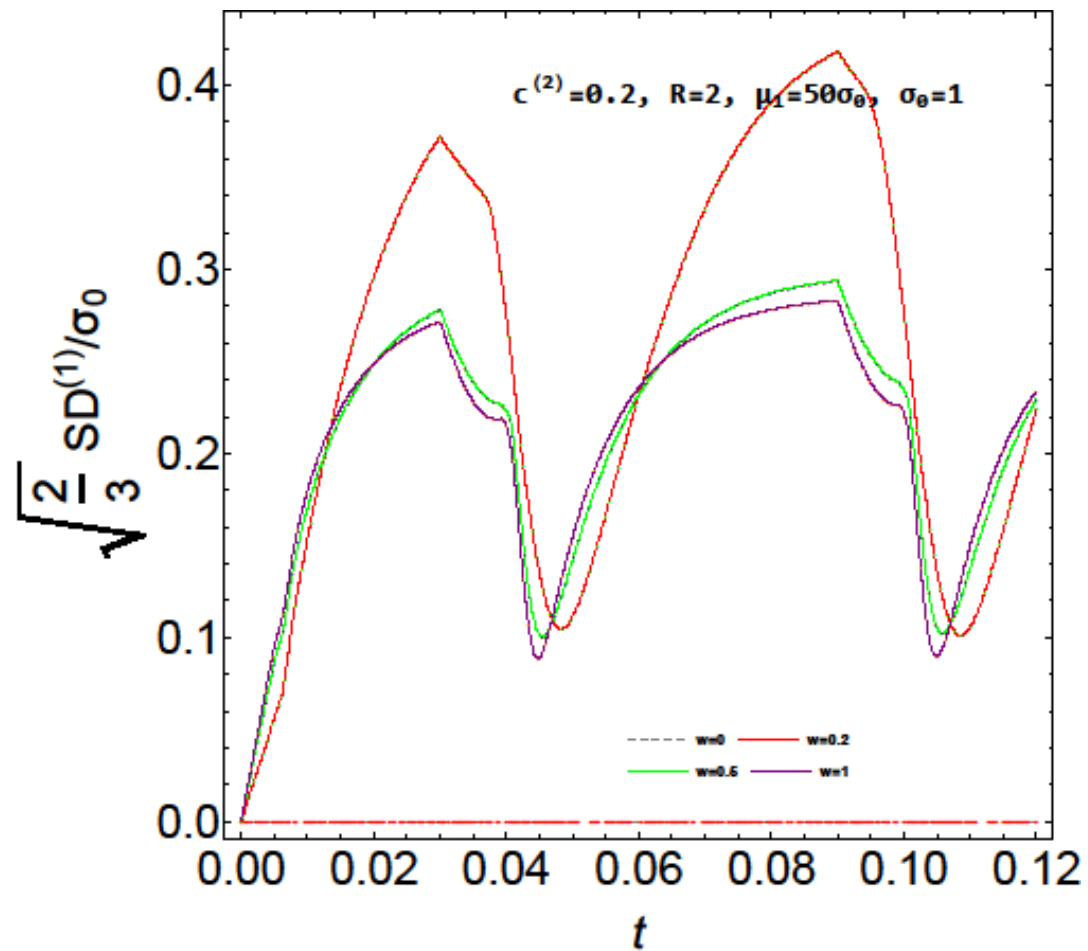
Σχήμα 4.31 : Μακροσκοπική αξονική απόκριση ενός σύνθετου υλικού αποτελούμενου από ελαστικά τέλεια πλαστικό φορέα και ελαστικά σφαιροειδή σωματίδια με $c^{(2)}=20\%$, $\mu_1=50\sigma_0$, $\sigma_0=1$ που φορτίζεται με αξονοσυμμετρική παραμόρφωση στη διεύθυνση 2 για συντελεστή $w=0,0.2,0.5,1$ αντίστοιχα



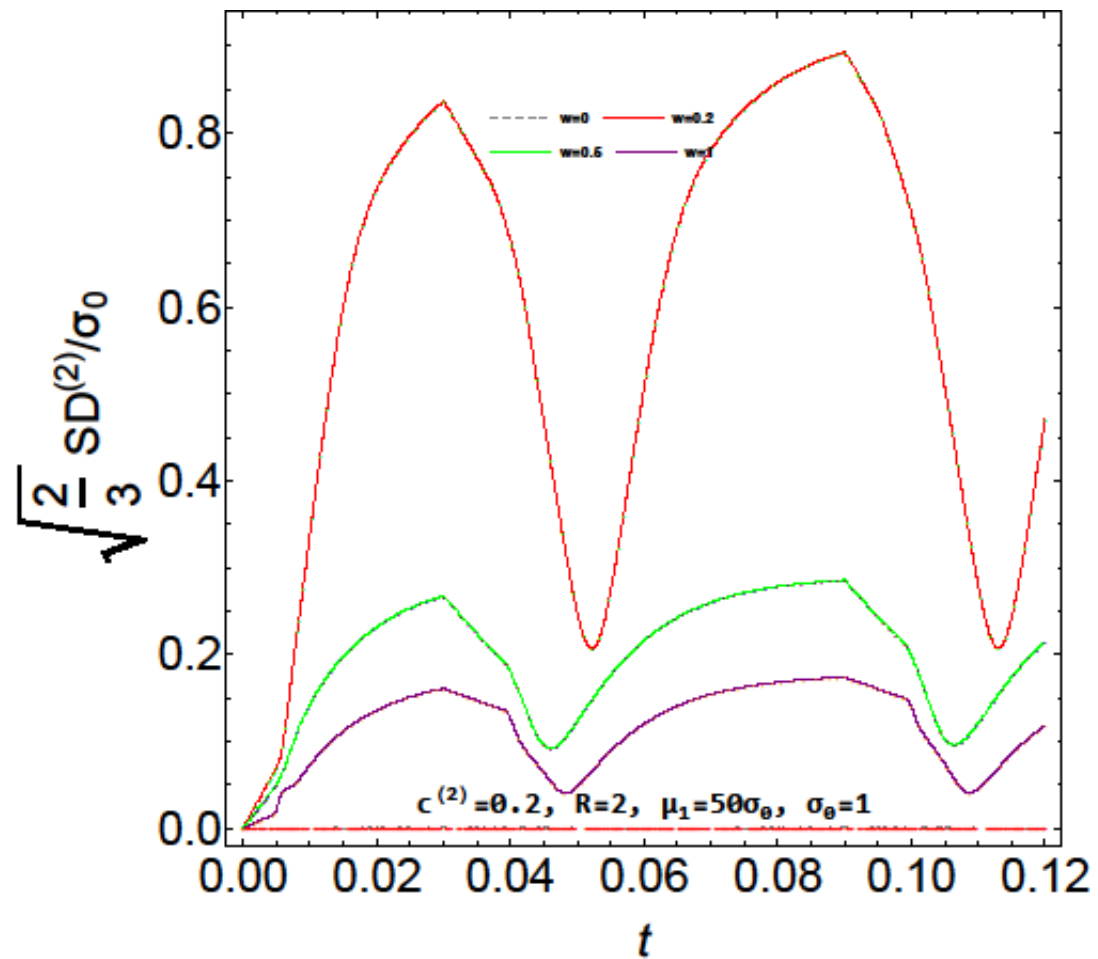
Σχήμα 4.32 : Μέση αξονική απόκριση του **φορέα** ενός σύνθετου υλικού αποτελούμενου από ελαστικά τέλεια πλαστικό φορέα και ελαστικά σφαιροειδή σωματίδια με $c^{(2)}=20\%, \mu_1=50\sigma_0, \sigma_0=1$ που φορτίζεται με αξονοσυμμετρική παραμόρφωση στη διεύθυνση 2 για συντελεστή $w=0,0.2,0.5,1$ αντίστοιχα



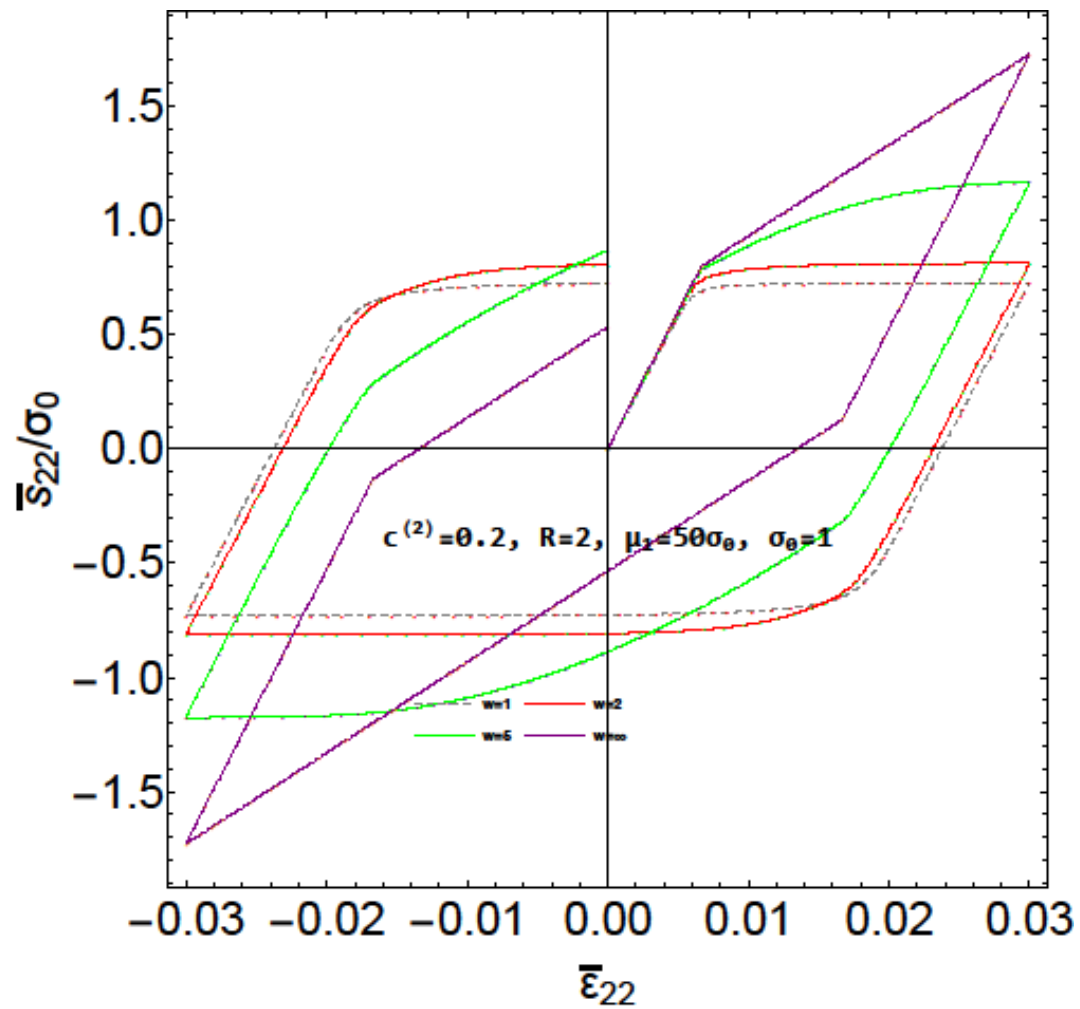
Σχήμα 4.33 : Μέση αξονική απόκριση των σωματιδίων σύνθετου υλικού αποτελούμενου από ελαστικά τέλεια πλαστικό φορέα και ελαστικά σφαιροειδή σωματίδια με $c^{(2)}=20\%, \mu_1=50 \sigma_0, \sigma_0=1$ που φορτίζεται με αξονοσυμμετρική παραμόρφωση στη διεύθυνση 2 για συντελεστή $w = 0, 0.2, 0.5, 1$ αντίστοιχα



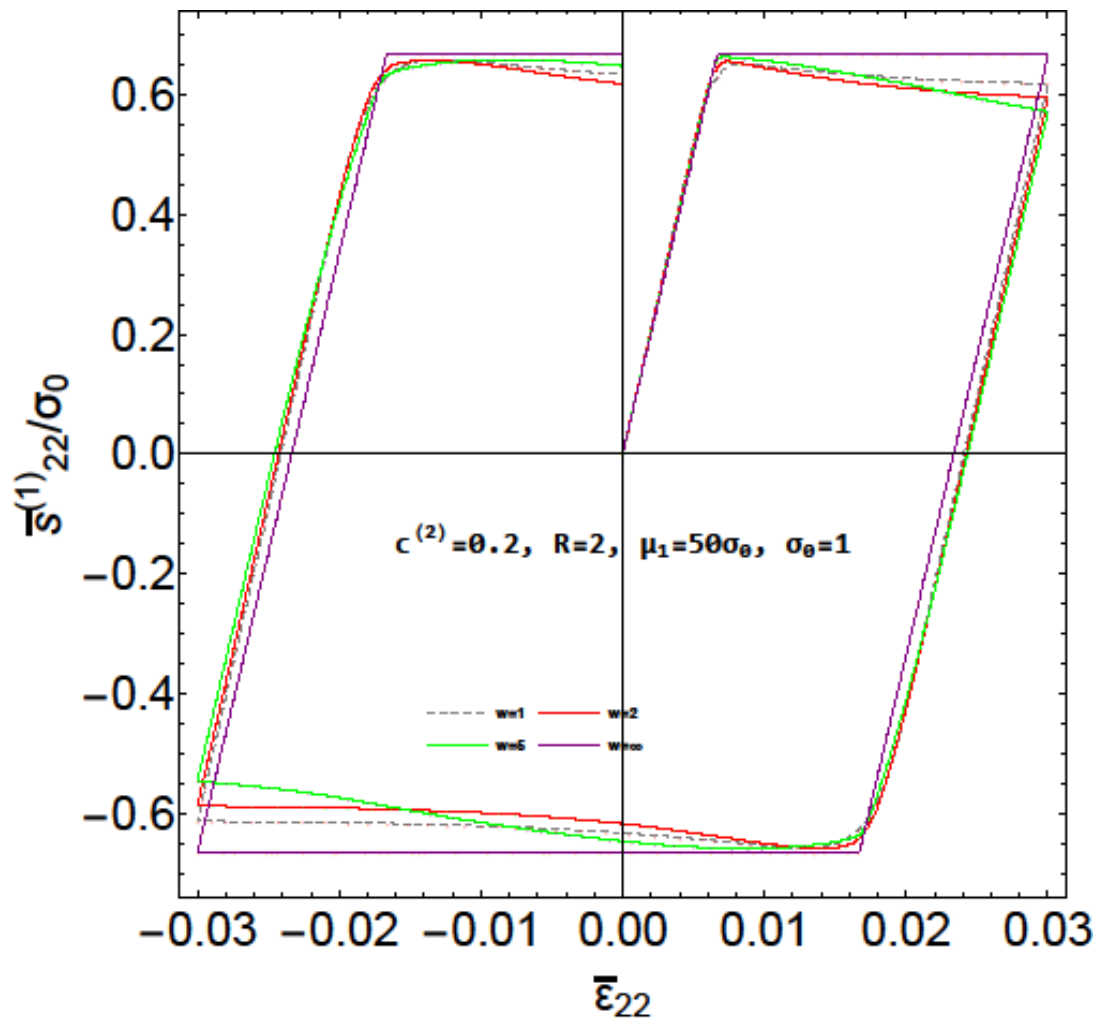
Σχήμα 4.34 : Τυπική απόκλιση του πεδίου των τάσεων του **φορέα** ενός σύνθετου υλικού αποτελούμενου από ελαστικά τέλεια πλαστικό φορέα και ελαστικά σφαιροειδή σωματίδια με $c^{(2)}=20\%, \mu_1=50 \sigma_0, \sigma_0=1$ που φορτίζεται με αξονοσυμμετρική παραμόρφωση στη διεύθυνση 2 για συντελεστή $w=0,0.2,0.5,1$ αντίστοιχα



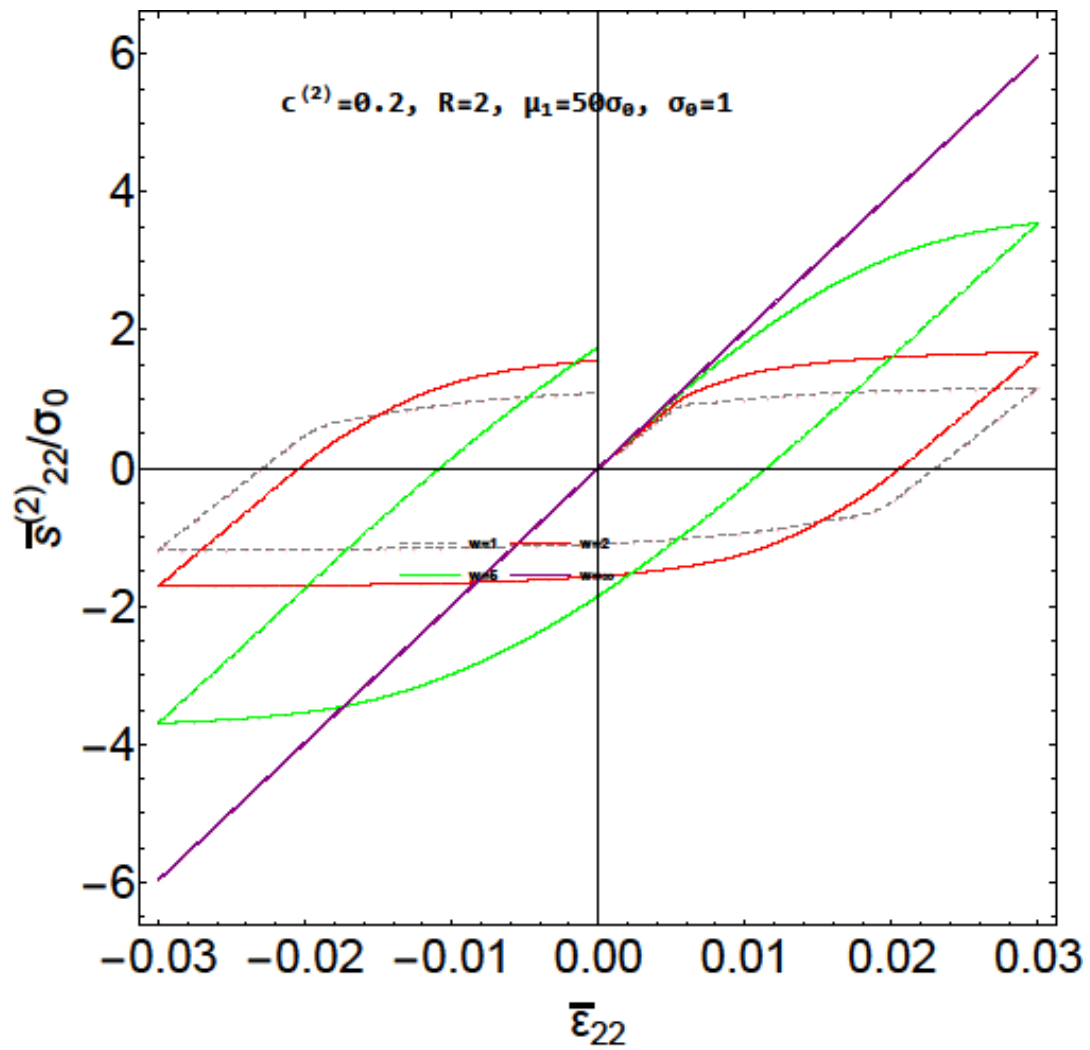
Σχήμα 4.35 : Τυπική απόκλιση του πεδίου των τάσεων του **σωματιδίου** σύνθετου υλικού αποτελούμενου από ελαστικά τέλεια πλαστικό φορέα και ελαστικά σφαιροειδή σωματίδια με $c^{(2)}=20\%, \mu_1=50 \sigma_\theta, \sigma_\theta=1$ που φορτίζεται με αξονοσυμμετρική παραμόρφωση στη διεύθυνση 2 για συντελεστή $w=0,0.2,0.5,1$ αντίστοιχα



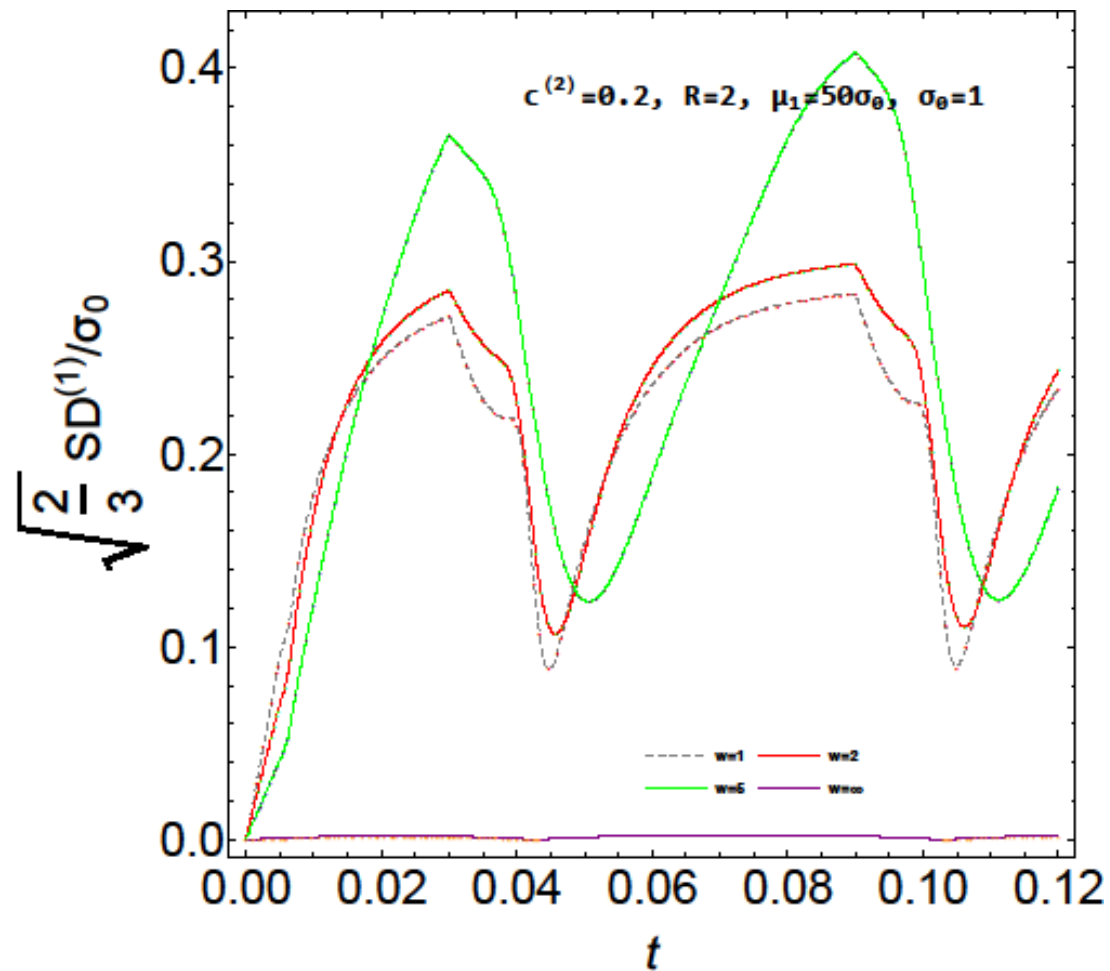
Σχήμα 4.36 : Μακροσκοπική αξονική απόκριση ενός σύνθετου υλικού αποτελούμενου από ελαστικά τέλεια πλαστικό φορέα και ελαστικά σφαιροειδή σωματίδια με $c^{(2)}=20\%$, $\mu_1=50\sigma_0$, $\sigma_0=1$ που φορτίζεται με αξονοσυμμετρική παραμόρφωση στη διεύθυνση 2 για συντελεστή $w=1,2,5, \infty$ αντίστοιχα



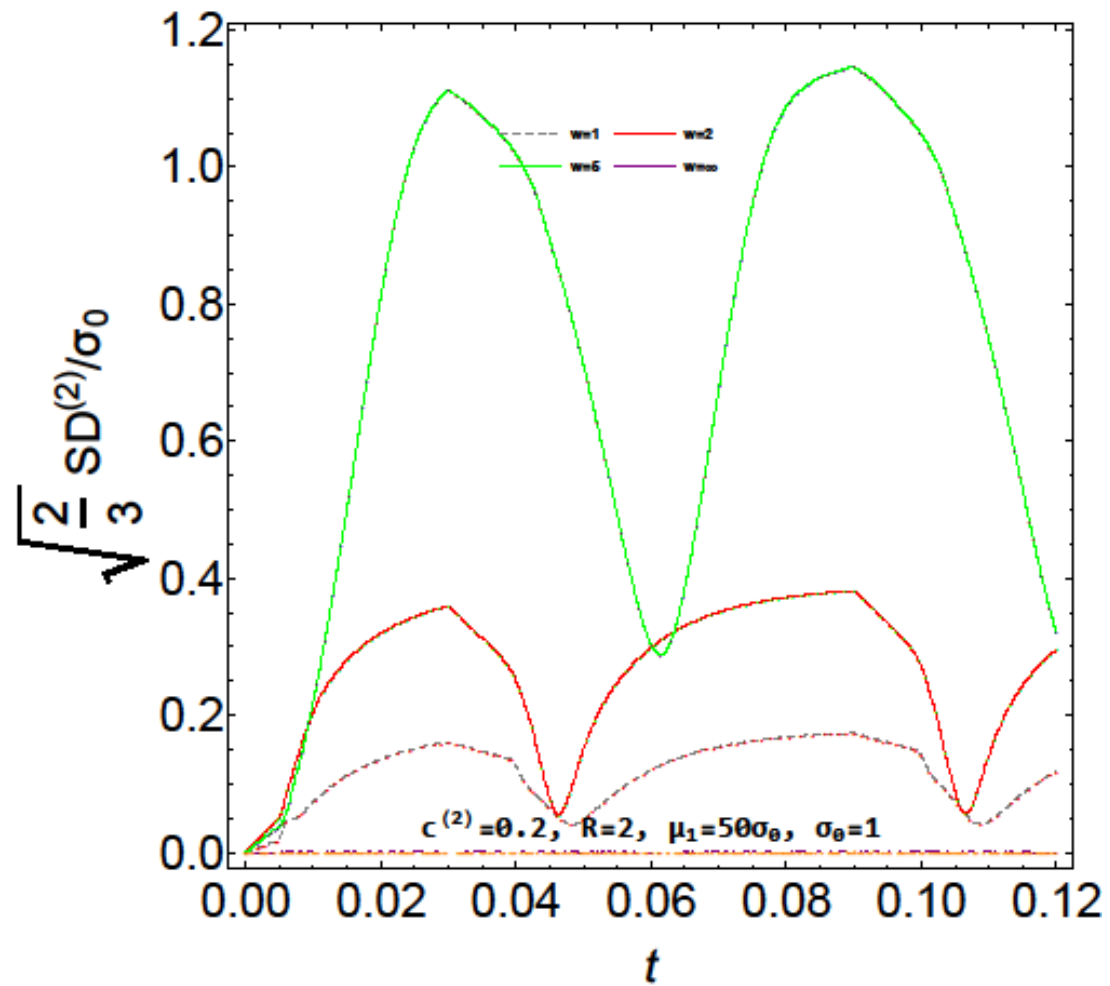
Σχήμα 4.37 : Μέση αξονική απόκριση του **φορέα** ενός σύνθετου υλικού αποτελούμενου από ελαστικά τέλεια πλαστικό φορέα και ελαστικά σφαιροειδή σωματίδια με $c^{(2)}=20\%, \mu_1=50\sigma_0, \sigma_0=1$ που φορτίζεται με αξονοσυμμετρική παραμόρφωση στη διεύθυνση 2 για συντελεστή $w=1,2,5, \infty$ αντίστοιχα



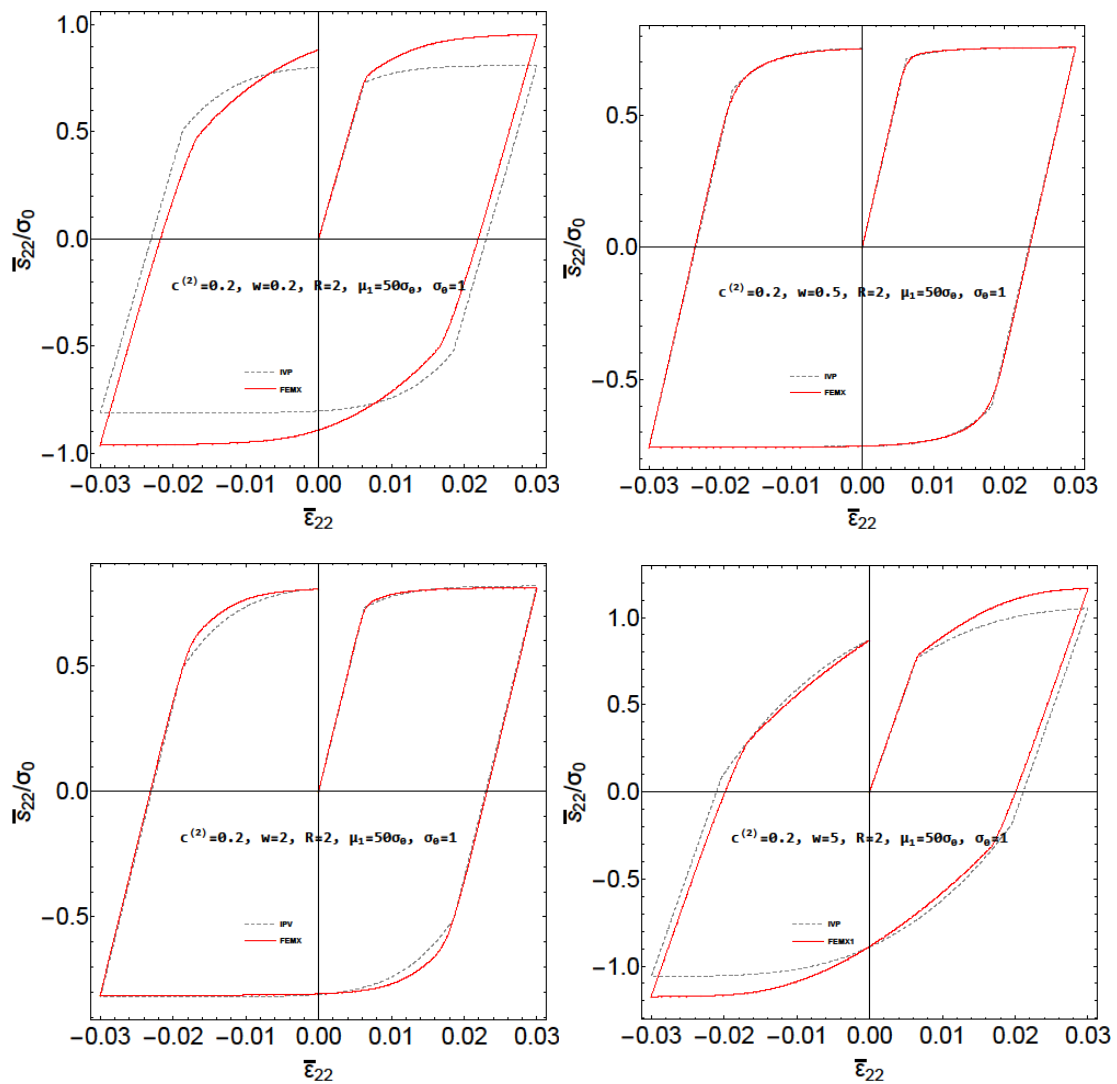
Σχήμα 4.38 : Μέση αξονική απόκριση των σωματιδίων σύνθετου υλικού αποτελούμενου από ελαστικά τέλεια πλαστικό φορέα και ελαστικά σφαιροειδή σωματίδια με $c^{(2)}=20\%, \mu_1=50 \sigma_0, \sigma_0=1$ που φορτίζεται με αξονοσυμμετρική παραμόρφωση στη διεύθυνση 2 για συντελεστή $w = 1, 2, 5, \infty$ αντίστοιχα



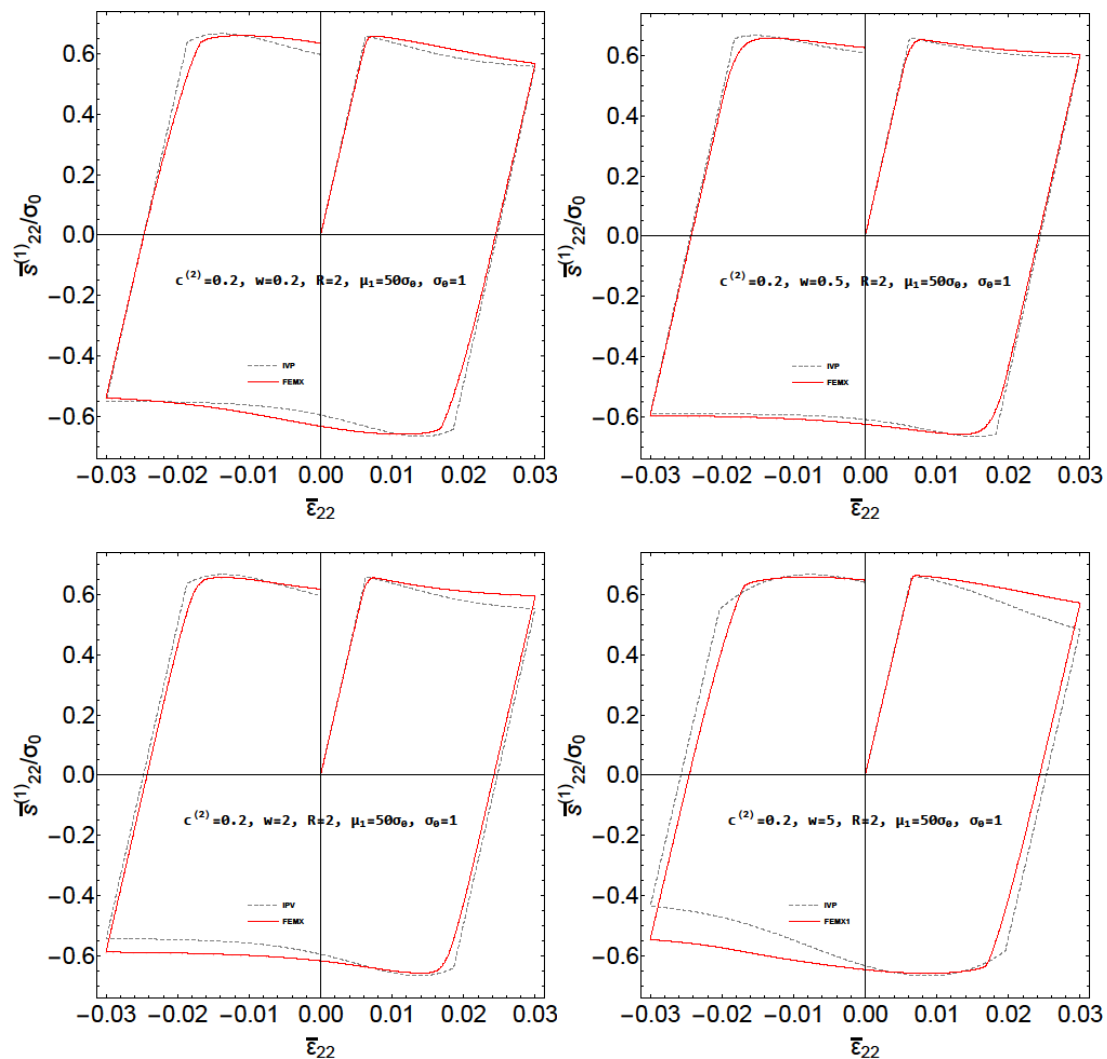
Σχήμα 4.39 : Τυπική απόκλιση του πεδίου των τάσεων του **φορέα** ενός σύνθετου υλικού αποτελούμενου από ελαστικά τέλεια πλαστικό φορέα και ελαστικά σφαιροειδή σωματίδια με $c^{(2)}=20\%, \mu_1=50 \sigma_0, \sigma_0=1$ που φορτίζεται με αξονοσυμμετρική παραμόρφωση στη διεύθυνση 2 για συντελεστή $w=1,2,5, \infty$ αντίστοιχα



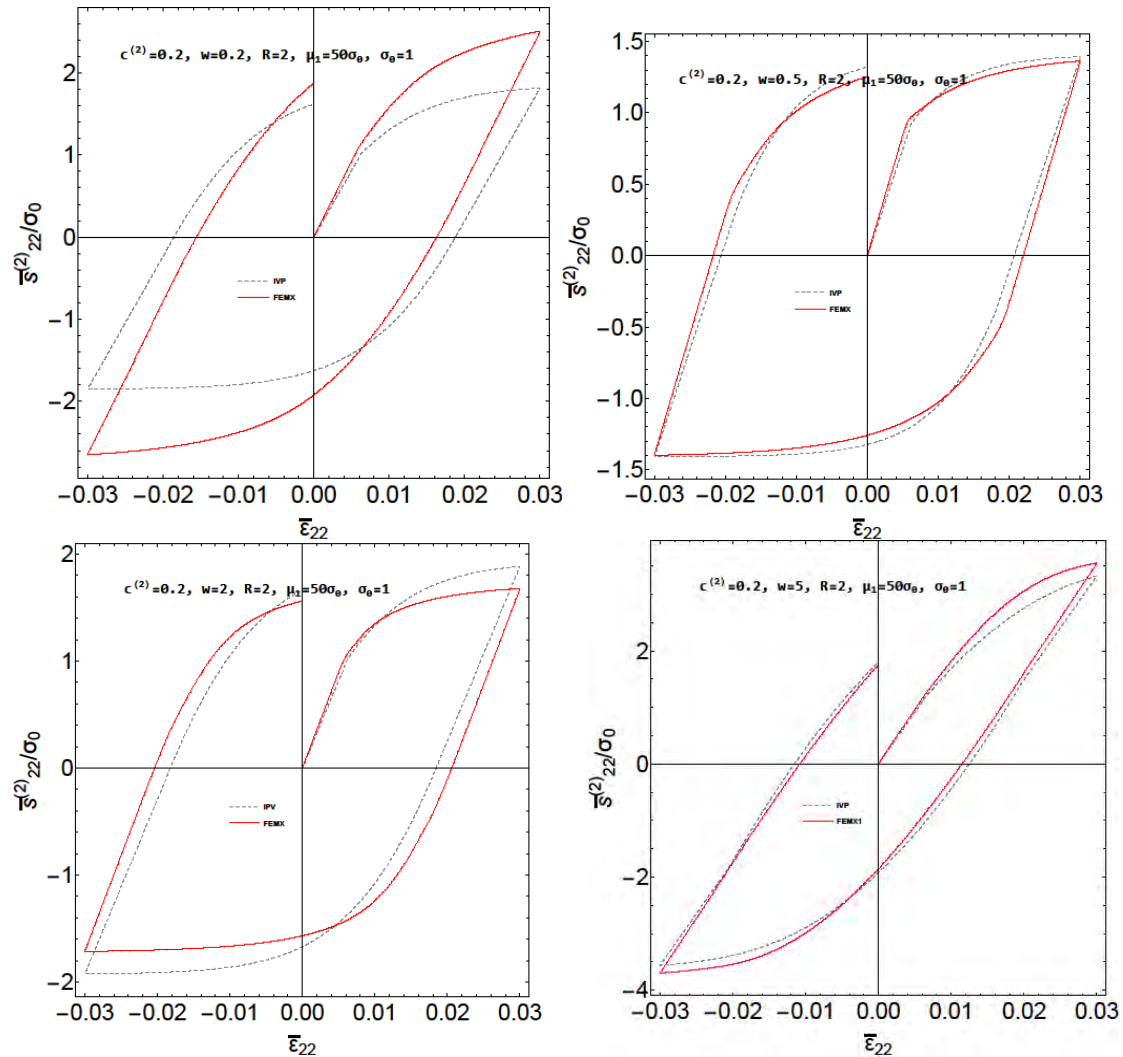
Σχήμα 4.40 : Τυπική απόκλιση του πεδίου των τάσεων του **σωματιδίου** ενός σύνθετου υλικού αποτελούμενου από ελαστικά τέλεια πλαστικό φορέα και ελαστικά σφαιροειδή σωματίδια με $c^{(2)}=20\%$, $\mu_1=50\sigma_0$, $\sigma_0=1$ που φορτίζεται με αξονοσυμμετρική παραμόρφωση στη διεύθυνση 2 για συντελεστή $w=1,2,5, \infty$ αντίστοιχα



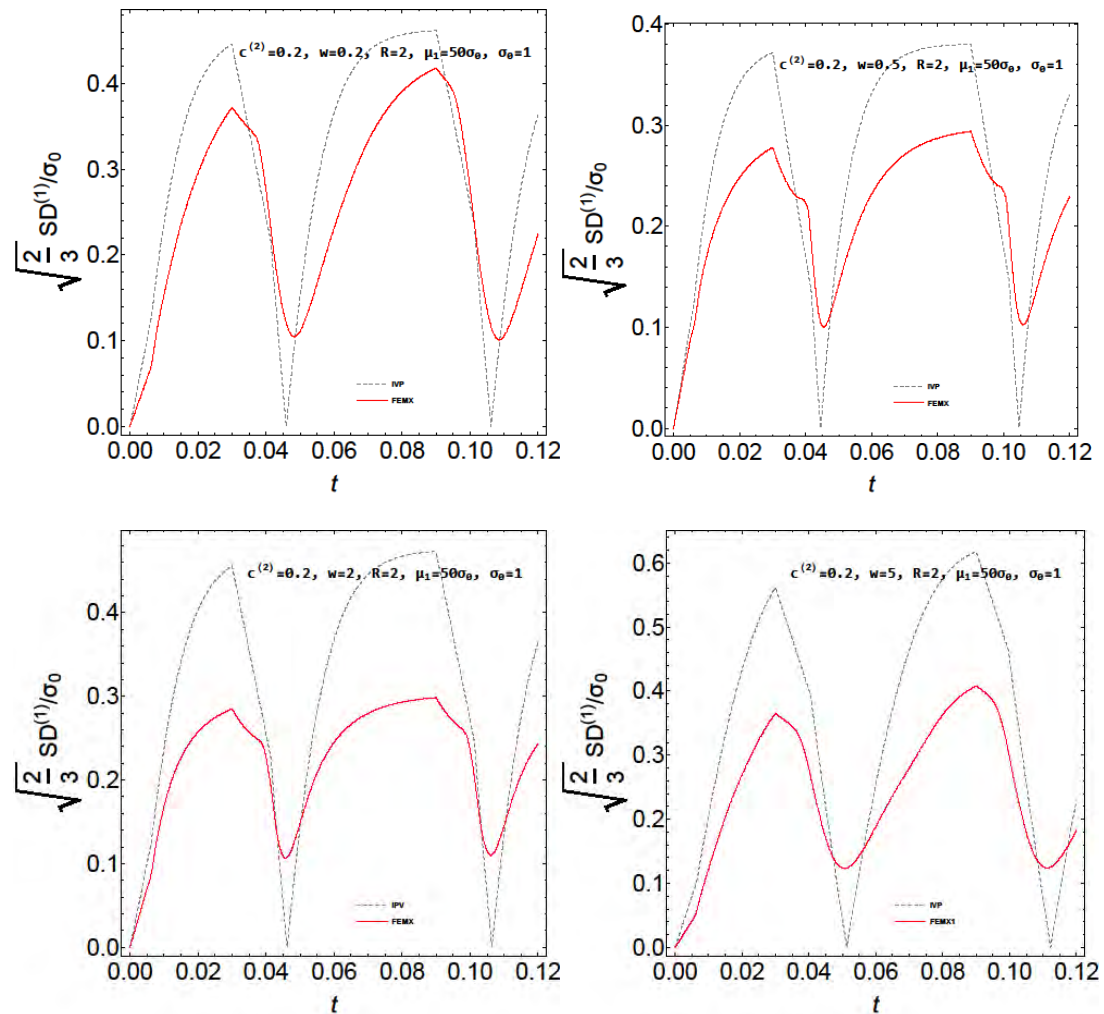
Σχήμα 4.41 : Σύγκριση αναλυτικών αποτελεσμάτων (IVP) με αντίστοιχα αριθμητικά αποτελέσματα για Μακροσκοπική αξονική απόκριση ενός σύνθετου υλικού αποτελούμενου από ελαστικά τέλεια πλαστικό φορέα και ελαστικά σφαιροειδή σωματίδια με $c^{(2)}=20\%$, $\mu_1=50\sigma_0$, $\sigma_0=1$ που φορτίζεται με αξονοσυμμετρική παραμόρφωση στη διεύθυνση 2 για συντελεστή $w=0.2, 0.5, 2, 5$ αντίστοιχα



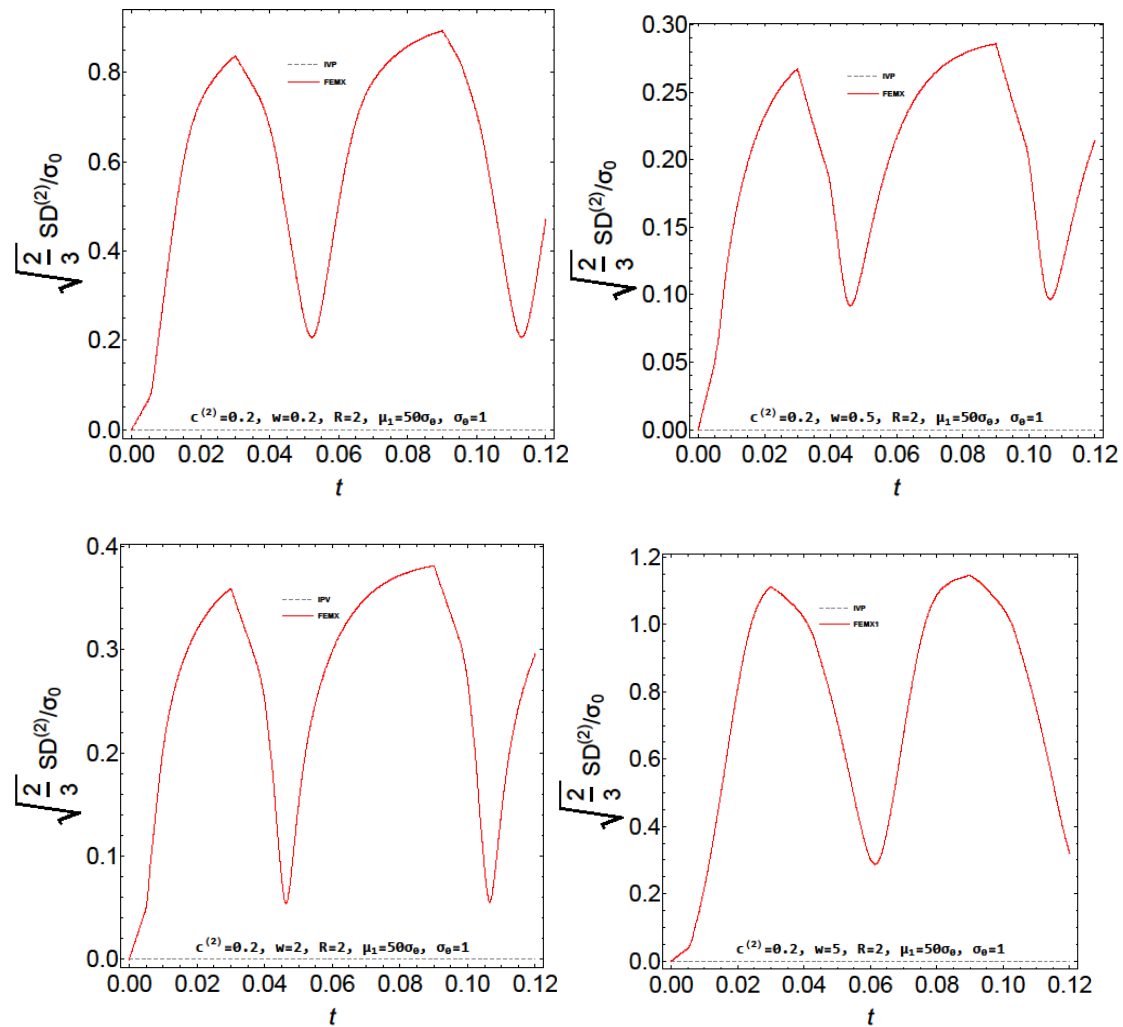
Σχήμα 4.42 : Σύγκριση αναλυτικών αποτελεσμάτων (IVP) με αντίστοιχα αριθμητικά αποτελέσματα για Μέση αξονική απόκριση του **φορέα** ενός σύνθετου υλικού αποτελούμενου από ελαστικά τέλεια πλαστικό φορέα και ελαστικά σφαιροειδή σωματίδια με $c^{(2)}=20\%$, $\mu_1=50\sigma_0$, $\sigma_0=1$ που φορτίζεται με αξονοσυμμετρική παραμόρφωση στη διεύθυνση 2 για συντελεστή $w=0.2, 0.5, 2, 5$ αντίστοιχα



Σχήμα 4.43 : Σύγκριση αναλυτικών αποτελεσμάτων (IVP) με αντίστοιχα αριθμητικά αποτελέσματα για Μέση αξονική απόκριση των σωματιδίων σύνθετου υλικού αποτελούμενου από ελαστικά τέλεια πλαστικό φορέα και ελαστικά σφαιροειδή σωματίδια με $c^{(2)}=20\%$, $\mu_1=50\sigma_0$, $\sigma_0=1$ που φορτίζεται με αξονοσυμμετρική παραμόρφωση στη διεύθυνση 2 για συντελεστή $w=0.2, 0.5, 2, 5$ αντίστοιχα



Σχήμα 4.44 : Σύγκριση αναλυτικών αποτελεσμάτων (IVP) με αντίστοιχα αριθμητικά αποτελέσματα για Τυπική απόκλιση του πεδίου των τάσεων του **φορέα** ενός σύνθετου υλικού αποτελούμενου από ελαστικά τέλεια πλαστικό φορέα και ελαστικά σφαιροειδή σωματίδια με $c^{(2)}=20\%$, $\mu_1=50\sigma_0$, $\sigma_0=1$ που φορτίζεται με αξονοσυμμετρική παραμόρφωση στη διεύθυνση 2 για συντελεστή $w=0.2, 0.5, 2, 5$ αντίστοιχα



Σχήμα 4.45 : Σύγκριση αναλυτικών αποτελεσμάτων (IVP) με αντίστοιχα αριθμητικά αποτελέσματα για Τυπική απόκλιση του πεδίου των τάσεων του **σωματιδίου** ενός σύνθετου υλικού αποτελούμενου από ελαστικά τέλεια πλαστικό φορέα και ελαστικά σφαιροειδή σωματίδια με $c^{(2)}=20\%$, $\mu_1=50\sigma_0$, $\sigma_0=1$ που φορτίζεται με αξονοσυμμετρική παραμόρφωση στη διεύθυνση 2 για συντελεστή $w=0.2, 0.5, 2, 5$ αντίστοιχα

Κεφάλαιο 5

Βιβλιογραφία

[Agoras et al. 2016] Agoras M ,Avazmohammadi R , and Castaneda P.P. (2016).Incremental Variational Procedure for elasto-viscoplastic composites and application to polymer- and metal-matric composites reinforced by spheroidal elastic particles. International Journal of Solids and Structures, 97-98:668-686

[Lahellec and Suquet 2013] Effective response and field statistics in elasto-plastic and elasto-visco-plastic composites under radial and non radial loadings. Int. J Plast. 42, 1-30

[Castaneda 1991] Castaneda P.P. The effective mechanical properties of nonlinear isotropic composites . Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 39 (1) :45-71

[Srivastava and Needleman 2013] Srivastava A and Needleman A . Void growth versus void collapse in a creeping single crystal . . Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 61(5):1169-1184

[Tvergaard ,2014] Tvergaard V . Bifurcation into a localized mode from non-uniform periodic deformations around periodic pattern of voids . Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 69:112-122

[Drugan and Willis 1996] W.J Drugan ,J.R Willis , Micromechanics-based variational estimates for a higher-order nonlocal constitutive equation and optimal choice of effective moduli for elastic composites .Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 44(4):497-524